Correction de l'exercice Automne 08
Bijection

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4-(x+1)^2 \end{array}$.

1. La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2(x+1).$$
Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1.$$
Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$. De même, f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$. De plus,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Enfin, $f(-1) = 4-0 = 4$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f			4		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

On observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 4$. Donc 5 par exemple ne possède aucun antécédent par f. Ainsi, f n'est pas surjective.
D'autre part, on a
$$\begin{cases} f(-2) = 4-(-2+1)^2 = 4-1 = 3 \\ f(0) = 4-(0+1)^2 = 3. \end{cases}$$
Donc $f(-2) = f(0)$ et f n'est pas injective. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ n'est ni injective ni surjective.}}$$
A fortiori, f n'est donc par bijective.

2. D'après le tableau de variation de la question précédente, on a
$$\boxed{f(\mathbb{R}) =]-\infty;4].}$$
Puisque $0 > -1$ toujours par le tableau précédent,
$$\boxed{f(\mathbb{R}_-^*) =]-\infty;4].}$$
De plus, on a $f(0) = 3$, $f(1) = 0$ et f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$. Donc
$$\boxed{f([0;1]) = [0;3].}$$

3. Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, on a
$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$
D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 - (x+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 = 2 \ \text{ OU } \ x+1 = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \text{ OU } \ x = -3. \end{aligned}$$
Dès lors, on a

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	4	↘ 0	↘ $-\infty$

Ainsi,
$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_-^*) =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[\,.}$$
Enfin, on
$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 - (x+1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 = \sqrt{3} \ \text{ OU } \ x+1 = -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3}-1 \ \text{ OU } \ x = -\sqrt{3}-1. \end{aligned}$$
D'où,

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}-1$	-1	$\sqrt{3}-1$	1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	4	↘ 1	↘ 0	↘ $-\infty$

Conclusion,
$$\boxed{f^{\leftarrow}([0;1]) = \left[-3; -\sqrt{3}-1\right] \cup \left[\sqrt{3}-1; 1\right].}$$

4. Par ce qui précède, on observe que f est continue et strictement décroissante sur $I = [-1; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus, on a
$$f(I) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); f(-1) \right] =]-\infty; 4]\,.$$
Conclusion,
$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } I = [-1; +\infty[\text{ dans } J =]-\infty; 4].}$$
On note φ la restriction de f de I dans J.

5. Soient $x \in I$ et $y \in J$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = \varphi(x) &\Leftrightarrow y = f(x) \\
&\Leftrightarrow y = 4 - (x+1)^2 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 - y \\
&\Leftrightarrow x + 1 = +\sqrt{4-y} \qquad \text{car } \begin{cases} 4 - y \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4-y}.
\end{aligned}$$

Conclusion, la réciproque de φ est donnée par

$$\boxed{\varphi^{-1} : \begin{array}{rcl} J =]-\infty; 4] & \to & I = [-1; +\infty[\\ y & \mapsto & 1 + \sqrt{4-y}. \end{array}}$$