Correction de l'exercice Automne 09
Calcul algébrique

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par définition de coefficient binomial, on a les égalités suivantes :

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1}.$$

L'entier n ne dépendant pas de la variable de sommation, on obtient que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n\sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} 1^p 1^{n-1-p}.$$

On reconnaît dans la dernière expression la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n\left(1+1\right)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}.}$$