Exercice Automne 10
Trigonométrie

Soit $\alpha \in [0;\pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$.
2. En déduire la valeur de α.
3. Montrer que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(x) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(x) \geqslant 2$.

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) - 2 \geqslant 0$

Pour tout x dans R, on a :

1/ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

donc on a : $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ Oui.

$= 2\cos^2(\alpha) - 1$

On remplace par la valeur de $\cos(\alpha)$

ce qui donne :

cos(2alpha) = $2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1$ ✓

$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{8} - 1$ ✓

$= \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{8} - 1$ ✓

$= \frac{6 - 4\sqrt{3} + 2}{8} - 1$ ✓

$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{8}$ -1

$= \frac{4(2-\sqrt{3})}{8} - 1$ ✓

$= \frac{2-\sqrt{3}}{2} - 1$ ✓

On a $\boxed{\cos(2\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$ ✓ 1/1 Bien.

2/ On sait que $\cos(2\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Donc ~~α vaut :~~ on a :

$2\alpha = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ OU ... !

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$

??? Tu confonds avec la dérivée.

$\Leftrightarrow \frac{\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}}{2}$

Non.

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{3}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{\frac{7}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{7}}$

$\boxed{\alpha \text{ vaut } \frac{-1}{\sqrt{7}}}$ A reprendre.

3/ On part de $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ ✓

ce qui nous donne : $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$

Pas clair. Pourquoi pas -racine(...) ? $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$

$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{\cos(2\alpha)+1}{2}}$ ✓

$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}}$ ✓

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{4}-\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4-(\sqrt{3}+2)}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}-2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) \text{ vaut } \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

Non, ce n'est pas le résultat attendu.

4/ On sait que $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) \geqslant 2$

~~$\Leftrightarrow \sqrt{6}\cos(x) + \sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x) - \sqrt{2}\sin(x) \geqslant 2$~~

Utilisons la forme polaire : Oui !

$$X = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{(6+\cancel{4}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2)(6-\cancel{4}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2)}$$

$$= \sqrt{(8+4\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})}$$ Ouf !

$$= \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{64-48}$$

$$\boxed{X = \sqrt{16} = 4}$$ Oui.

On a donc

$$\cos(\cancel{\theta}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\cancel{\theta}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

multiplions par le conjugué : ?

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{6+\sqrt{6}(-\sqrt{2})-\sqrt{2}\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{4}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

Mais que fais-tu ?

D'où sort ce résultat ?

Donc $\theta = \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$

On a donc :

Non.

Reprendre la fin.

$$4\cos(x+\theta) \geqslant 2$$

$$\Rightarrow \cos(x+\theta) \geqslant \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

On conclut donc que l'ensemble solution est :

$$x+\theta \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in \left[-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12} ; \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right] + 2k\pi}$$