

Exercices pour s'entraîner :  
L'inconnue est  $x$ , trouver les solutions réelles lorsqu'elles existent :

$$1 - 2x^2 - dx - d^2 = 0$$

2 -  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  Toutes les grandeurs sont des distances positives. Donner une condition qui soit satisfaite.



### Exercice Automne 10 Trigonométrie

Soit  $\alpha \in [0; \pi]$  tel que  $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .

1. Calculer  $\cos(2\alpha)$ .
2. En déduire la valeur de  $\alpha$ .
3. Montrer que  $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) \geq 2$ .

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$1/ \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\text{donc on a : } \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad \text{Oui.}$$
$$= 2\cos^2(\alpha) - 1$$

On remplace par la valeur de  $\cos(\alpha)$

ce qui donne :

$$\cos(2\alpha) = 2 \left( \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{8} - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{8} - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{3} + 2}{8} - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{8} - 1$$

$$= \frac{4(2 - \sqrt{3})}{8} - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - 1 \quad \checkmark$$

$$\text{On a } \boxed{\cos(2\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}} \quad \checkmark \quad \text{Bien.}$$

ensemble solution  
 $\Rightarrow x + \theta \in \left[ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$

équations

- Si  $\Delta \geq 0$ , les deux solutions réelles sont  $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Si  $\Delta < 0$ , les deux solutions complexes sont  $x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2/ On sait que  $\cos(2\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Donc  $\alpha$  vaut : on a :

$2\alpha = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$  OU ... 

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$

??? Tu confonds avec la dérivée.

Non.

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1 + \frac{3}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1 + \frac{3}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{\frac{7}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{7}}$

$\alpha$  vaut  $\frac{-1}{\sqrt{7}}$  A reprendre.

3/ On part de  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  ✓

ce qui nous donne :  $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$

Pas clair. Pourquoi pas -racine(...)?

$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$

$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}}$  ✓

$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1}{2}}$  ✓

donc que l'ensemble

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{-\sqrt{3} + 2}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3} + 2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{\sqrt{3} + 2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4 - (\sqrt{3} + 2)}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4 - \sqrt{3} - 2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) \text{ vaut } \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$$

Non, ce n'est pas le résultat attendu.

4/ On sait que  $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) \geq 2$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{6} \cos(x) + \sqrt{2} \cos(x) + \sqrt{6} \sin(x) - \sqrt{2} \sin(x) \geq 2$

Utilisons la forme polaire: **Oui!**

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{(6 + 4\sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2) + (6 - 4\sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2)} \\ &= \sqrt{(8 + 4\sqrt{3})(8 - 4\sqrt{3})} \quad \text{Ouf!} \\ &= \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{64 - 48} \\ \boxed{X = \sqrt{16} = 4} \quad \text{Oui.} \end{aligned}$$

On a donc

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

multiplions par le conjugué = ?

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} \\ &= \frac{8 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Mais que fais-tu ?

D'où sort ce résultat ?

$$\text{Donc } \theta = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} &\text{Non.} \\ &4 \cos(x + \theta) \geq 2 \\ \Rightarrow \cos(x + \theta) \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Reprendre la fin.

On conclut donc que l'ensemble solution est :

$$\begin{aligned} x + \theta &\in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] + 2k\pi \\ \Rightarrow \boxed{x \in \left[-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right] + 2k\pi} \end{aligned}$$