Correction de l'exercice Automne 10
Trigonométrie

1. On sait que
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.$$
Donc par définition de α, on a
$$\cos(2\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} - 1 = \frac{8 - 4\sqrt{3} - 8}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\cos(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

2. Par la question précédente, on remarque que $\cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Donc
$$\begin{aligned} & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ OU } 2\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ OU } \alpha = -\frac{5\pi}{12} + k\pi. \end{aligned}$$
Or $\alpha \in [0;\pi]$. Nécessairement,
$$\boxed{\alpha = \frac{5\pi}{12}.}$$

3. On sait que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Donc
$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} \\ &= \frac{16 - 8 + 4\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$
Par ces calculs, on remarque que $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. De la même façon, on a $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = 8 + 4\sqrt{3}$. Ainsi,
$$\sin^2(\alpha) = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{16}.$$
Donc $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ou $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Cependant, $\alpha = \frac{5\pi}{12} \in [0;\frac{\pi}{2}]$. Donc $\sin(\alpha) \geqslant 0$. Ainsi, nécessairement,
$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par les questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) :\ \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(x)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(x) \geqslant 2 &\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(x)+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow \quad & \sin(\alpha)\cos(x)+\cos(\alpha)\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x+\alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}+2k\pi\\
\Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x+\frac{5\pi}{12} \leqslant \frac{5\pi}{12}+2k\pi\\
\Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{12}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{3\pi}{12}+2k\pi;\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right].}$$