31/10)

1) Soit $h : z \mapsto \dfrac{-iz+2}{z+1}$

Soit $z \in \mathbb{C}$, $h(z)$ existe $\iff z+1 \neq 0$ ✓

$\iff z \neq -1$ ✓

donc $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ Oui A encadrer.

2) On a :

$$h(-i) = \frac{-i \times i + 2}{i+1}$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{i+1}$$

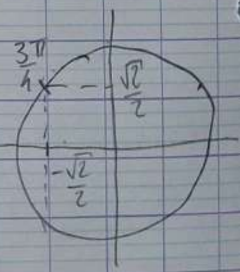
$$= \frac{-(1-i)}{(i+1)(1-i)}$$

$$= \frac{i-1}{2}$$ Cohérent.

donc forme cartésienne de $h(-i)$ est :

$$h(-i) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i$$ ✓

De plus $h(-i) = \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i \right)$ $\sqrt{2}$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) i \right)$$ Bien

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i 3\pi/4}$$

Donc la forme polaire de $h(-i)$ est :

$$h(-i) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \pi \times \frac{3}{4}}$$

3a) Soit p le module de $z+1$ et p' celui de $h(z)+i$

On a :

$$p = \sqrt{(z+1)(\bar{z}+1)}$$
$$= \sqrt{|z|^2 + z + \bar{z} + 1}$$
$$= \sqrt{|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1}$$ OK

De plus

$$p' = |h(z)+i|$$

$$h(z)+i = -\frac{iz+2}{z+1} + \frac{i(z+1)}{z+1}$$ ✓
$$= \frac{-iz-2+i(z+1)}{z+1}$$ ✓
$$= \frac{i(z+1-z)-2}{z+1}$$ ✓
$$= \frac{i-2}{z+1}$$ ✓

donc $$p' = \sqrt{\left(\frac{i-2}{z+1}\right)\cdot\overline{\left(\frac{i-2}{z+1}\right)}}$$ OK
$$= \sqrt{\frac{(i-2)(-i-2)}{(z+1)(\bar{z}+1)}}$$ ✓
$$= \sqrt{\frac{5}{|z|^2+2\mathrm{Re}(z)+1}}$$ Bien.

donc $$pp' = \sqrt{\frac{(|z|^2+2\mathrm{Re}(z)+1)\times 5}{|z|^2+2\mathrm{Re}(z)+1}} = \sqrt{5}$$ OK !

On pouvait calculer plus rapidement, cf corrigé.

3b) On a :

M un point de C, de centre $A(-1)$ et rayon 2, et d'affixe z.

donc $\rho = |z+1|$ est la distance entre M et le centre A du cercle C. ✓ Donc $\rho = 2$

De plus $\rho\rho' = \sqrt{5}$ ✓

donc $\rho' = \frac{\sqrt{5}}{\rho} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ✓

car C est de rayon 2. ✓

On a également M', d'affixe $h(z)$

$\rho' = |h(z)+i|$ donc la distance entre le point M' et le point d'affixe $(-i)$ ✓

$\rho' = \frac{\sqrt{5}}{2} =$ constante

donc M' appartient au cercle C' de centre $B(-i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Bien.