Correction de l'exercice Automne 11
Complexes

Soit $h : z \mapsto -\frac{iz+2}{z+1}$.

1. Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h dans $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$h(z) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad z+1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-1\}.}$$

2. On note que $-i \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} h(-i) &= -\frac{i \times (-i) + 2}{-i+1} \\ &= -\frac{1+2}{1-i} \\ &= -\frac{3(1+i)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{h(-i) = -\frac{3}{2}(1+i).}$$

De plus,

$$h(-i) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

D'où la forme polaire de $h(-i)$ est donnée par

$$\boxed{h(-i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}.}$$

3. Soit $z \in \mathcal{D}$. On note M le point d'affixe z, M' celui de $h(z)$, ρ le module de $z+1$ et ρ' celui de $h(z)+i$.
   (a) On a les égalités dans $\mathbb{R}_+$ suivantes :

$$\begin{aligned} \rho\rho' &= |z+1|\,|h(z)+i| \\ &= |z+1|\left|-\frac{iz+2}{z+1} + i\right| \\ &= |z+1|\left|\frac{-iz-2+iz+i}{z+1}\right| \\ &= |-2+i| \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\rho\rho' = \sqrt{5}.}$$

(b) Supposons que $M(z)$ soit sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-1)$ et de rayon 2. Alors,

$$|z-(-1)|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |z+1|=2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho=2.$$

Par la question précédente,

$$\sqrt{2}\rho'=\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad \rho'=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |h(z)+i|=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |h(z)-(-i)|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc, dans ce cas, on en déduit que

$$\boxed{M'\left(h(z)\right) \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre } B\left(-i\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{2}.}$$