Exercice n° 12

Soit $f : x \longmapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\ 1+x^2 \neq 0 \end{cases}$ oui

Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-x^2 \leqslant 2x \\ 2x \leqslant 1+x^2 \\ \cancel{x \neq 1} \text{ ou } \cancel{x \neq -1} \end{cases}$ CAR ...

$x^2+1 \geqslant 1 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x^2+2x+1 \\ 0 \leqslant x^2-2x+1 \\ x \neq 1 \text{ ou } x \neq -1 \end{cases}$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant (x+1)^2 \\ 0 \leqslant (x-1)^2 \\ x \neq 1 \text{ ou } x \neq -1 \end{cases}$ ✓ OK!

$\Leftrightarrow \{ x \neq 1 \text{ ou } x \neq -1$

2) f est dérivable sur son ensemble de définition ~~par composée de fonctions~~ donc NON

$D' = \mathbb{R} \{-1 ; 1\}$

3) La fonction f est donc dérivable, oui... soit $x \in D'$

Posons $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $g'(x) = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$ ✓

$= \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ NON

$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$ ✓ $= \frac{g'(x)}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$ ✓ $= \frac{g'(x)}{\frac{x^2-1}{1+x^2}}$???

Parachutage

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{1+x^2}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+\cancel{x^2})}{(x^2-1)} \times \frac{2(1-x^2)}{(\cancel{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)}$$

$$= -\frac{2}{1+x^2}$$

4) On a donc $f'(x)$, ⚠ une dérivée de f pour retrouver une expression simple de f on peut primitiver cela. On peut primitiver sur l'intervalle $[1, +\infty[$ ✓

On a donc à calculer $\int -\frac{2}{1+x^2} = \int -2\arctan'(x)$

Soit $f : x \mapsto -2\arctan(x) + \text{cste}$ est une expression simplifiée de f