

Correction de l'exercice Automne 12

Fonctions usuelles

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction arcsin n'est définie que sur $[-1; 1]$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 x \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \\ 1+x^2 \neq 0 \text{ toujours vrai} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2 \quad \text{car } 1+x^2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2+2x+1 \\ 0 \leq 1-2x+x^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \text{ toujours vrai} \\ 0 \leq (1-x)^2 \text{ toujours vrai} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Conclusion, la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

2. La fonction arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$. Donc de même qu'à la question précédente, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 x \in \mathcal{D}' &\Leftrightarrow -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \\
 &\Leftrightarrow -1-x^2 < 2x < 1+x^2 \quad \text{car } 1+x^2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (x+1)^2 \\ 0 < (1-x)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Conclusion, la fonction f est dérivable sur

$$\boxed{\mathcal{D}' =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[.}$$

3. Par la question précédente, f est dérivable sur $]1; +\infty[$. De plus pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} \\
 &= \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\
 &= \frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \\
 &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \quad \text{car } 1+x^2 > 0 \\
 &= \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
 &= \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \frac{1}{x^2-1} \quad \text{car } x^2-1 > 0 \text{ car } x > 1 \\
 &= -\frac{2}{1+x^2} .
 \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall x \in]1; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}.}$$

4. Puisque $]1; +\infty[$ est un **intervalle** de \mathbb{R} (au contraire de \mathcal{D}' par exemple), on en déduit

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]1; +\infty[, \quad f(x) = -2 \arctan(x) + C.$$

Or la fonction f et la fonction \arctan sont continues en 1 donc par passage à la limite quand $x \rightarrow 1$, on obtient

$$f(1) = -2 \arctan(1) + C.$$

Autrement dit, la relation reste vraie pour $x = 1$. On en déduit également que

$$\arcsin\left(\frac{2}{1+1}\right) = -2\frac{\pi}{4} + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \pi - 2 \arctan(x).}$$

NB1 : On pouvait aussi prendre la limite en $+\infty$ ou la valeur de $\sqrt{3}$ pour obtenir C .

NB2 : On peut aussi obtenir une expression de f sur $[-1; 1]$ et/ou sur $]-\infty; -1]$. Pour ce dernier intervalle on peut aussi se servir de son imparité.