Exercice hiver 01

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $\tilde{u}_n = n^2 \frac{n}{e^n - 1}$ ✓

$\lim_{n \to +\infty} \tilde{u}_n = 0$ par croissance comparée ✓

De plus, $n^2 \frac{n}{e^n-1} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$

Donc à partir d'un certain n, $0 < n^2 \frac{n}{e^n-1} \leqslant 1$ ✓

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{n}{e^n-1} \leq \frac{1}{n^2}$ ✓ car $n \in \mathbb{N}^*$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{e^n-1} \text{ converge}}$. ✓ Bien.

2) Soit $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$

On a $P' = 4X^3 - 6X^2 + 6X - 2$ ✓

$$\begin{array}{l|l} -2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 & 4X^3 - 6X^2 + 6X - 2 \\ \hline (-2X^3 + 3X^2 - 3X + 1) & \cancel{-0,5} \ \frac{1}{2} \\ X & \end{array}$$

Bien

On a donc $\boxed{P - X^4 = \cancel{-0,5} - \frac{1}{2} P' + X}$

~~$\Leftrightarrow P' - 4X^3 - 1 = -3\left(X - \frac{1-i}{2}\right)\left(X - \frac{1+i}{2}\right)$~~

~~$\Leftrightarrow P' = 3\left(X - \frac{1-i}{2}\right)\left(X - \frac{1+i}{2}\right) + 4X^3 - 1$~~

On pose α une racine commune à P et P'

On a donc $P(\alpha) - \alpha^4 = -\frac{1}{2} P'(\alpha) + \alpha$ oui

$\Leftrightarrow 0 - \alpha^4 = 0 + \alpha$ ✓

$\Leftrightarrow -\alpha^4 = \alpha$ ✓

On trouve donc $\alpha = -j$ et $-j^2$ parachutage.

Les racines communes de P et P' sont $\boxed{-j \text{ et } -j^2}$

On a donc $(X+j)(X+j^2) = X^2 + X(j^2+j) + 1$ ✓

$= X^2 - X + 1$ ✓ divise P

~~$P = (X^2 + X + 1)(X^2 - 3X$~~

$$3x^2$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 & x^2 - x + 1 \\
\hline
-(x^4 - x^3 + x^2) & x^2 - x + 1 \checkmark \\
\quad -x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \checkmark & \\
\quad -(-x^3 + x^2 - x) & \\
\qquad x^2 - x + 1 \checkmark & \\
\qquad -(x^2 - x + 1) & \\
\qquad\qquad 0 & \checkmark
\end{array}
$$

On a donc $\boxed{\begin{aligned} P &= (X^2 - X + 1)^2 \\ P &= (X + j)^2 (X + j^2)^2 \end{aligned}}$

dans $\mathbb{R}[X]$

dans $\mathbb{C}[X]$

Bien.