Correction Hiver 01
Séries et polynômes

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^n \neq 1$ et donc u_n existe. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. On observe aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n^2 u_n = \frac{n^3}{\mathrm{e}^n - 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n} \qquad\qquad \text{car } 1 \ll n \to +\infty\, \mathrm{e}^n.$$

Donc par croissance comparée,

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n} = 0.$$

Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$,

$$0 \underset{(\text{car } u_n > 0)}{<} n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a
$$P' = 4X^3 - 6X^2 + 6X - 2.$$
Donc
$$P - X^4 = -2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = -\frac{1}{2}\left(4X^3 - 6X^2 + 6X - 2\right) + X.$$
Posons $R = X$ et $Q = -\frac{1}{2}$. Alors, on a bien $P - X^4 = QP' + R$ avec
$$\deg(R) = 1 < 3 = \deg(P').$$
Donc on obtient la division euclidienne suivante :
$$\boxed{P - X^4 = -\frac{1}{2}P' + X.}$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P et de P'. Alors $P(a) = P'(a) = 0$. Donc par la question précédente,
$$\begin{aligned}
& P(a) - a^4 = -\frac{1}{2}P'(a) + a \\
\Leftrightarrow \quad & -a^4 = a \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 + a = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a\left(a^3 + 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0 \ \text{ OU } \ a^3 = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0 \ \text{ OU } \ \exists k \in \{0;1;2\}, \quad a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2ik\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0 \ \text{ OU } \ a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \ \text{ OU } \ a = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \ \text{ OU } \ a = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = -j.
\end{aligned}$$
Vérifions parmi ces possibilités, lesquelles sont réellement racines de P et de P'.

- Si $a=0$, alors $P(a)=1\neq 0$, donc $a=0$ n'est pas une solution.
- Si $a=-1$, alors $P(a)=(-1)^4-2(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)+1=1+2+3+2+1=9\neq 0$ donc $a=-1$ n'est pas une solution.
- Si $a=-j$. Rappelons que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$. Donc

$$\begin{aligned}P(a)=P(-j)&=(-j)^4-2(-j)^3+3(-j)^2-2(-j)+1\\&=j^4+2j^3+3j^2+2j+1\\&=j+2+3j^2+2j+1\\&=3\left(j^2+j+1\right)=0.\end{aligned}$$

  De plus,

$$\begin{aligned}P'(a)=P'(-j)&=4(-j)^3-6(-j)^2+6(-j)-2\\&=-4j^3-6j^2-6j-2\\&=-4-6j^2-6j-2\\&=-6\left(j^2+j+1\right)=0.\end{aligned}$$

  Donc $-j$ est une racine de P et de P'.
- Notons que P et P' sont à coefficients réels. Donc puisque $-j$ est une racine de P et de P' alors, $\overline{-j}$ est aussi une racine de P et de P' i.e. $-j^2$ est une racine de P et de P'.

Conclusion,

$$\boxed{\text{les racines communes à } P \text{ et } P' \text{ sont } -j \text{ et } -j^2.}$$

3. D'après la question précédente, $-j$ et $-j^2$ sont deux racines distinctes de P de multiplicité au moins 2 de P. Or

$$\deg(P)=4=2+2.$$

Donc P ne peut pas avoir d'autre racine et $-j$ et $-j^2$ sont de multiplicité 2 exactement. Par conséquent,

$$P=\lambda(X-(-j))^2\left(X-(-j^2)\right)^2,$$

avec λ le coefficient dominant de P : c'est-à-dire ici $\lambda=1$. On obtient alors la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{P=(X+j)^2\left(X+j^2\right)^2.}$$

Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on rassemble les racines non réelles qui sont conjuguées :

$$P=\left((X+j)\left(X+j^2\right)\right)^2=\left(X^2+\left(j+j^2\right)X+j^3\right)^2=\left(X^2-X+1\right)^2,$$

car $1+j+j^2=0 \Rightarrow j+j^2=-1$. Conclusion, la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$\boxed{P=\left(X^2-X+1\right)^2.}$$