

Exercice Hiver 02

Séries et continuité-dérivabilité

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2 \sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Justifier que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .