Exercice 1 :

Soit $u_n = \dfrac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = \dfrac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}$ or $\sin\left(\frac{1}{n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^5}$ ✓

donc $2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^5}$ ✓

et $\cos\left(\frac{2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{4}{2n^4} + o\left(\frac{4}{n^4}\right)$

$1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{4}{n^4}\right)$ ✓ $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ ...

et $2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^5} + o\left(\frac{2}{n^5}\right)$

donc $\dfrac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\frac{2}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}$

or $\dfrac{\frac{2}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{2}{n^5}}{\frac{2}{n^4}}$ OK! $\cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}}$ $\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ✓

donc $\dfrac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ~~converge~~ diverge en tant que série de ~~Riemann~~ Riemann d'exposant $\alpha = 1$

Il manque l'hypothèse de positivité !!!

donc d'après le théorème d'équivalence, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}$ di~~con~~verge

$$\boxed{\text{Conclusion : } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2\sin\left(\frac{1}{n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)} \text{ di\cancel{con}verge.}}$$

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ✓

$x \longmapsto \frac{1}{e^x-1}$ est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ✓

Donc par ~~quotient~~ produit, f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ oui

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)} \checkmark = 1 \checkmark$$

donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{e^x-1} = 1$ ✓ ~~existe~~

Ainsi $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 oui

donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Bien.

$$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

2)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et f est continue sur $\mathbb{R}$, de plus f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et
d'après la question précédente ✓

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)'$

$= \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$ ✓

$f'(x) = \dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2}$ ✓

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \dfrac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1-x) - 1}{\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$ ✓

$\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \dfrac{1 - x + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x^2 + o(x^2)}$ ✓

$\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$

Oui

$\dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} -\dfrac{1}{2} + o(1)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{2} + o(1) \to -\dfrac{1}{2}$. ✓

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = -\frac{1}{2}$

Ainsi

- f est continue sur $\mathbb{R}$ ✓
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ ✓
- $\lim\limits_{\substack{x \to x \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $-\frac{1}{2}$ oui

Donc par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ ton on déduit que f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

TB !