

## Correction Hiver 03

### Séries et espaces vectoriels

**Solution de l'exercice 1** Puisque  $\frac{1}{2^n} \ll_{n \rightarrow +\infty} 4 \ll_{n \rightarrow +\infty} n^3$ . Donc  $n^3 + 4 + \frac{1}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3$ . Par passage à l'inverse :

$$u_n = \frac{1}{n^3 + 4 + \frac{1}{2^n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$  converge en tant que série de Riemann d'exposant  $\alpha = 3 > 1$ . Or  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n^3} > 0$ . Donc par le théorème des équivalents de séries numériques à termes positifs, on en conclut que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

### Solution de l'exercice 2

1. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{rg}(u_1, u_2, u_3) &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \\ &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Les deux vecteurs  $v_1 = (1, -1, 2)$  et  $v_2 = (0, 2, -3)$  n'étant pas colinéaires la famille  $(v_1, v_2)$  est libre et donc

$$\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg}(v_1, v_2) = \text{Card}(v_1, v_2) = 2.$$

Conclusion,

$$\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2.$$

2. Puisque  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ . Par définition du rang,

$$\dim(F) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = \text{rg}(u_1, u_2, u_3).$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\dim(F) = 2.$$

3. On observe les points suivants :

- $G \subseteq \mathbb{R}^3$  par définition.
- Si  $u = (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors  $x = y = z = 0_{\mathbb{R}}$  est donc  $x + y + z = 0_{\mathbb{R}}$ . Donc  $0_{\mathbb{R}^3} \in G$ .

- Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(u, v) \in G^2$ . Notons  $u = (x, y, z)$ ,  $v = (x', y', z')$  et  $w = (x'', y'', z'') = \lambda u + \mu v$ . Montrons que  $w \in G$ . On a

$$w = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \lambda u + \mu v = \begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \lambda x + \mu x' \\ y'' = \lambda y + \mu y' \\ z'' = \lambda z + \mu z' \end{cases} .$$

Donc

$$x'' + y'' + z'' = \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' = \lambda \underbrace{(x + y + z)}_{=0 \text{ car } u \in G} + \mu \underbrace{(x' + y' + z')}_{=0 \text{ car } v \in G} = 0.$$

Donc  $w \in G$  et  $G$  est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a les équivalences suivantes :

$$u \in G \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow u = \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Donc

$$G = \text{Vect} \left( \underbrace{\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{=\mathcal{B}_G} \right) .$$

*NB : cela démontre également que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .*

Donc  $\mathcal{B}_G$  engendre  $G$ . De plus  $\mathcal{B}_G$  est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Conclusion,

$$\mathcal{B}_G = \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } G.$$