Exercice 1 :

$$U_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n}$$

On factorise :

$$U_n = \frac{\sqrt{n}}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$ Oui !

Posons $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$ ✓

Soit $u = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ oui

Donc $\frac{\sqrt{n}}{2n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ ✓

$= \dots$ A finir.

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

~~Posons~~ Soit DL(0) de $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}u^2 + o(u^2)$

$$\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$ ✓

Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}$. Alors

- $u \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ oui
- $u^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{16}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ✓
- $o\left(o\left(u^2\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ✓

Donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \sqrt{x^2}\left(1 \cancel{+} \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ TB

$\underset{x \to +\infty}{=} x + 2 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ ✓

Alors f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x + 2$ oui !

De plus, $f(x) - x - 2 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} > 0$ ✓

Donc la courbe de f est au dessus de son asymptote en $+\infty$. Parfait !