Correction Hiver 04
Séries et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

Or $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+o(u)$. Donc en posant $u=\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4n^{3/2}} > 0$. Donc par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2 Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,, $x^2+4x+5>0$ et donc $f(x)$ existe et on a

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} \qquad \text{car } x>0.$$

On sait que

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2+o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o\left(u^2\right)$$

Posons $u(x) = \frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$u(x)^2 = \left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{16}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
- Enfin, $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\begin{array}{lll} 1+\frac{2}{x} & +\frac{5}{2x^2} & \\ & -\frac{2}{x^2} & +o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ & & +o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{array}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+2+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y = x+2.}$$

De plus, $f(x)-x-2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} > 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc la courbe de f est

$$\boxed{\text{au dessus de son asymptote } \textbf{au voisinage} \text{ de } +\infty.}$$