Exercice 5.

Par récurrence 1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$

X $\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. ✓

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_0}{2^n} = 0$. ✓

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. OK

Vu que $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$ étudions la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_0}{2^n}$.

$u_n \leq \frac{u_0}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$. ✓

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_0}{2^n} = u_0 \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ On reconnait une suite géométrique de raison $-1 < q < 1$ ✓

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_0}{2^n}$ converge. 6m

Par le théorème : $\boxed{\text{Donc } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}}$

2) Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.
Supposons $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
Montrons que f est injective i.e
$\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$. oui

$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$\Leftrightarrow f(\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}) = \{x \in F \mid x \in f(A) \text{ et } x \in f(B)\}$ ok

Soit $(x,y) \in$ ~~$\mathcal{P}(E)$~~ E^2, $f(x) = f(y) = z$

Si $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Oui !

On a $f(A) = f(B) = \{z\}$. ✓

$f(A \cap B) = f(A)$ car $f(A) = f(B)$. Oui !

D'où $f(A \cap B) = \{z\}$. ✓

donc $A \cap B \neq \emptyset$
Sinon $f(A \cap B) = \emptyset \neq \{z\}$
Donc $A \cap B = \{x\}$
$= \{y\}$

$\Rightarrow$ ~~$f(A) \cap f(B) = \{z\}$~~.

$\Rightarrow x = y$