Exercice Hiver 05
Séries et ensembles et applications

Solution de l'exercice 1 Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Conclusion, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2 Montrons que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $z = f(x) = f(y)$. Puisque $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ sont deux parties de E, on a par hypothèse,

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{z\} \cap \{z\} = \{z\}.$$

Or si $x \neq y$, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ et donc $f(\{x\} \cap \{y\}) = \emptyset = \{z\}$. Contradiction. Donc $x = y$ ce qui démontre bien que f est injective.