Exercice Hiver 06
Suites et séries

Exercice 1 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}.$$

On pose également $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $U = \left[\frac{1}{2} \,;\, \frac{3}{2}\right]$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$-lipschitzienne sur $U = \left[\frac{1}{2} \,;\, \frac{3}{2}\right]$.
3. Montrer que f possède un unique point fixe dans U.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
5. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et de $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n - 1|$.

   Vous pensiez pouvoir échapper aux séries numériques aujourd'hui ? ?