1) Mq « $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini et $U_n \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ »

procédons par ré~~c~~currence : ✓

* pour $n = 0$

$U_0 = \frac{1}{2}$ bien définie et $U_0 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ✓

- soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose que P_n est vrai

Mq P_{n+1} est vrai aussi oui

On a $U_{n+1} = \sqrt{2 - U_n}$

On a $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ⟹ il faut $2 - U_n \geq 0$

donc $(U_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

On a $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{2}$ ✓

$-\frac{3}{2} \leq -U_n \leq -\frac{1}{2}$ ✓

$\frac{1}{2} \leq 2 - U_n \leq \frac{3}{2}$ ✓

$\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2 - U_n} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}$ car $\begin{cases} \frac{3}{2} \geq 1 \\ \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases}$

~~$\sqrt{2 - U_n} \leq$~~

$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ Oui

Conclusion

P_n est vrai TB

2) $\sqrt{x} \in \quad f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$

f dérivable sur $[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}]$ ✓

$\forall x \in \mathbb{R} \; f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$ ✓

$\frac{1}{2} \leq \sqrt{2-x} \leq \frac{3}{2}$ OK

$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq 2$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \leq 1$ ✓

$\Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \leq -\frac{1}{3}$ ✓

Non.

$\left| -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(x,y) \in U^2$

on sait que f continue sur $[x,y]$ ou $[y,x]$ ✓

et dérivable sur $]x,y[$ ou $]y,x[$ ✓

donc $\exists c \in]x,y[$ ou $]y,x[\quad f(x)-f(y) = f'(c)(x-y)$

Oui

$c \in [x;y] \subseteq U$

$|f(x)-f(y)| \leq |f'(c)| \; |x-y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|$

d'après la question...

donc f $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lipschitzienne sur U

Oui

3) ~~on a~~ f continue et strictement decroissante sur U

et $f(U) = [f(\frac{3}{2}), f(\frac{1}{2})] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}]$

~~$f(x) = x$~~

Soit $x \in U$

~~$\forall x \in U$~~

3) un point fixe $\Longrightarrow f(x) = x$ ✓

$\Longrightarrow \sqrt{2 - x} = x$ ✓

$\Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ ✓

$\Delta = 1 - 4(-2)$

$= 1 + 8$

$\Delta = 9$ ✓

donc $x = \frac{-1-3}{2}$ ou $x = \frac{-1+3}{2}$

$x = -2$ ou $x = 1$ ✓

On a $-2 \notin U$

donc l'unique point fixe de f dans U est 1 Bien.

4)