Correction Hiver 06
Suites et séries

Solution de l'exercice 1

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } u_n \text{ existe et } u_n \in U \text{ ».}$$
Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = \frac{1}{2}$ existe et $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] = U$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. u_n existe et $u_n \in U$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$. Alors
$$2 - \frac{1}{2} \geqslant 2 - u_n \geqslant 2 - \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3}{2} \geqslant 2 - u_n \geqslant \frac{1}{2}.$$
Donc $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ existe. De plus, par croissance de la fonction racine carrée,
$$\sqrt{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2 - u_n} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}.$$
Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} < 1$ donc $\sqrt{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2}$. D'où,
$$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \leqslant \frac{3}{2}$$
i.e. $u_{n+1} \in U$. On a donc bien montré $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Finalement,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in U = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].}$$

2. On note que la fonction f est définie sur $]-\infty\,; 2]$ et donc sur $U = \left[\frac{1}{2}\,; \frac{3}{2}\right] \subseteq\,]-\infty\,; 2]$. La fonction f est de plus dérivable sur $]-\infty\,; 2[$. ATTENTION !!!! la racine carrée n'est pas dérivable en 0 d'où la nécessité d'ouvrir en 2. Donc f est dérivable sur U et
$$\forall x \in U, \qquad f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}.$$
Or pour tout $x \in U$, $\frac{1}{2} \leqslant 2 - x \leqslant \frac{3}{2}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2-x} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$. Ainsi, $0 < \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leqslant \sqrt{2}$. Par conséquent,
$$\forall t \in U, \qquad |f'(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \leftarrow \textit{indépendant de } t\,!$$
Soit $(x, y) \in U^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ (car elle l'est sur U) et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$ (car elle l'est sur U). Donc par le théorème des accroissements finis,
$$\exists t \in\,]x; y[\text{ ou }]y; x[\,, \qquad f(x) - f(y) = f'(t)\,(x - y)\,.$$
Puisque $t \in [x; y] \subseteq U$, par ce qui précède
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f'(t)|\,|x - y| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,|x - y|\,.$$
Ce résultat reste vrai si $x = y$. On en conclut donc que
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \frac{\sqrt{2}}{2}\text{-lipschitzienne sur } U.}$$

3. Soit $x \in U$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2-x} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 - x \qquad \text{car } x \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + X - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$. Donc les racines associées sont $\frac{-1+3}{2} = 1$ et $\frac{-1-3}{2} = -2$. Or $-2 \notin U$ et $1 \in U$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un unique point fixe dans } U \text{ qui est } x = 1.}$$

4. Puisque f est $\frac{\sqrt{2}}{2}$-lipschitzienne sur U, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $x = u_n \in U$ et $y = 1 \in U$, alors on a

$$|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - 1|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - 1|.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut le reformuler de la façon suivante (petit glissement d'indice) :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad |u_n - 1| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} |u_{n-1} - 1|$$

Puis,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad |u_n - 1| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} |u_{n-1} - 1| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} |u_{n-2} - 1| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 |u_{n-2} - 1|.$$

On retrouve une suite « sous-géométrique ». Par une récurrence, on montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - 1| \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |u_0 - 1| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0\,;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0.$$

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$

5. Puisque la **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 \neq 0$, alors on en déduit que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - 1|$. Dans la question précédente, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Or la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1;1[$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n - 1| \text{ converge.}}$$