# Correction Hiver 07
# Séries et espaces vectoriels

**Solution de l'exercice 1** Pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est bien définie. Par croissance comparée, on a

$$nu_n = \frac{n}{\ln^3(n)} \underset{n\to+\infty}{\longleftrightarrow} +\infty.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$nu_n \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \geqslant \frac{1}{n} > 0 \qquad\qquad \text{car } n > 0.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ diverge.}}$$

**Solution de l'exercice 2**

1. - Par définition, $F \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $M = 0_n$, alors $A \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ et donc $0_3 \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in F^2$. Alors en posant $P = \lambda M + \mu N$, on a

     $$AP = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN.$$

     Or $AM = MA$ et $AN = NA$ car $M$ et $N$ sont dans $F$. Donc

     $$AP = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N) A = PA.$$

     Donc $F$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Il est facile de vérifier que $I_2 \in F$ et que $A \in F$. L'ensemble $F$ étant un espace vectoriel, on en déduit directement que $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subseteq F$. Malheureusement, ne connaissant pas la dimension de $F$, on en peut pas conclure directement. Détaillons donc les éléments de $F$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors,

on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
M \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ c+d & -c-d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-c = a+b \\ b-d = -a-b \\ a-c = c+d \\ b-d = -c-d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ 2b-d = -a \\ a = 2c+d \\ b = -c \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ -2c-d = -a \\ a = 2c+d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ a = 2c+d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 2c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Par des opérations élémentaires à partir des deux matrices trouvées, on pourrait reconstruire $I_2$ et $A$. Mais notons plutôt que l'on vient de trouver une famille génératrice de $F$ de cardinal 2. Donc $\dim(F) \leqslant 2$. Or $(I_2, A)$ forme une famille libre de $F$. Donc $\dim(F) = 2$. Donc $(I_2, A)$ est une famille libre de $F$ de même cardinal que la dimension de $F$ donc forme une base de $F$. Par conséquent,

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(I_2, A).}$$