Brigitte
Badji
PTSI

Exercice Hiver 08

Séries et Analyse asymptotique

Exercice 1

1) Développement limité de f à 3 en 0

$f(x) = \cos(e^{x}) + \alpha \tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$

$e^{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ✓

$\cos(e^{x}) \underset{x\to 0}{=} \cos\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$ ✓

$\underset{x\to 0}{=} \cos 1 \cos\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \sin(1)\sin\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

TB

$\cos\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4}{24} + o\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4$ ✓

$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$\underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ ✓

$\underset{x\to 0}{=} x^2 + x^3 + o(x^3)$ ✓

$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$\underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3)$ ✓

$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 \underset{x\to 0}{=} \left(x^3 + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$\underset{x\to 0}{=} o(x^3)$ ✓

$o\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = o(x^3)$ ✓

oui !

$$\cos\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$\sin\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6}$$

$$+o\left(\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\cancel{\frac{x^3}{6}}+o(x^3)-\cancel{\frac{x^3}{6}}+o(x^3)+o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\cos(e^x) \underset{x\to 0}{=} \cos 1\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\sin(1)\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \cos 1 - x\sin 1-\frac{x^2}{2}(\cos 1+\sin 1)-\frac{x^3}{2}\cos 1+o(x^3)$$

$$\tan\left(x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+o(x^2)$$

$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o(x^3)$$

$$\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) \underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-x^2+x^3+o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o(x^3)+\frac{(x-x^2+x^3+o(x^3))^3}{3}+o\left((x-x^2+x^3+o(x^3))^3\right)$$

$$(x-x^2+x^3+o(x^3))^2 \underset{x\to 0}{=} (x-x^2+x^3+o(x^3))(x-x^2+x^3+o(x^3))$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^2-x^3+o(x^3)-x^3+o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^2-2x^3+o(x^3)$$

$$(x-x^2+x^3+o(x^3))^3 \underset{x\to 0}{=} (x^2-2x^3+o(x^3))(x-x^2+x^3+o(x^3))$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^3+o(x^3)$$

$o((x-x^2+x^3+o(x^3))^3) = o(x^3)$ ✓

$$a\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) \underset{x\to 0}{=} a\left(x-x^2+x^3+o(x^3)+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$$ ✓

$$\underset{x\to 0}{=} a\left(x-x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)\right)$$ ✓

$$\underset{x\to 0}{=} ax - ax^2 + \frac{4ax^3}{3} + o(x^3)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos 1 - x\sin 1 - \frac{x^2}{2}(\cos 1 + \sin 1) - \frac{x^3}{2}\cos 1 + o(x^3)$$
$$+ ax - ax^2 + \frac{4ax^3}{3} + o(x^3)$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos 1 + x(-\sin 1 + a) + x^2\left(-\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{2} - a\right) + x^3\left(-\frac{\cos 1}{2} + \frac{4a}{3}\right) + o(x^3)}$$ TB !!!

2- Déterminons unique valeur de a pour que 0 soit un extremum de f et précisons alors la nature de cet extremum

0 extremum de $f \iff -\sin 1 + a = 0$ ✓

$\iff a = \sin 1$ ✓

donc $\boxed{\sin 1 = a}$ 6mi

Vérifions le signe de $-\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{2} - a$

$$-\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{2} - a = -\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{2} - \sin 1$$ ✓

$$= -\frac{\cos 1}{2} - \frac{3}{2}\sin 1$$ ✓

$$= -\frac{1}{2}(\cos 1 + 3\sin 1)$$

or $1 \in [0; \pi/2]$ donc $\cos(1) > 0$ ✓ $\sin 1 > 0$ ✓ $\Rightarrow 3\sin 1 >$

alors $\cos 1 + 3\sin 1 > 0$ ✓ $\Rightarrow -\frac{1}{2}(\cos 1 + 3\sin 1) < 0$ ✓

car $-\frac{1}{2} < 0$

donc $-\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{2} - a < 0$ alors f admet un maximum local

Parfait !!

$\boxed{\text{donc } 0 \text{ est un maximum local de } f}$

Exercice 2 = Nature de la série de terme générale $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Posons $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ $\quad n^2 u_n = \frac{n^4}{2^n}$ ✓

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$ par croissance comparée ✓

donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$0 < n^2 u_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 < u_n \leq \frac{1}{n^2}$ ✓

or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que séries de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

Oui

$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge}}$ TB!