Correction Hiver 08
Séries et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. On sait que
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$. Alors,
$$\begin{aligned}\cos\left(\mathrm{e}^x\right) &\underset{x\to 0}{=} \cos\left(1+u(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)\cos\left(u(x)\right)-\sin(1)\sin\left(u(x)\right).\end{aligned}$$
Or $\cos\left(u\right) \underset{u\to 0}{=} 1-\frac{u^2}{2}+o\left(u^3\right)$ et $\sin\left(u\right) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)$. Donc
$$\cos\left(1+u\right) \underset{u\to 0}{=} \cos(1)\cos\left(u\right)-\sin(1)\sin\left(u\right) \underset{u\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)u-\cos(1)\frac{u^2}{2}+\sin(1)\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right).$$
De plus, on a
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - Puis
$$\begin{aligned}u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad +\tfrac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\quad +\tfrac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$
   - Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc
$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3+o\left(x^3\right).$$
   - Et enfin, $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

   Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)u-\cos(1)\tfrac{u^2}{2}+\sin(1)\tfrac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)x \quad -\sin(1)\tfrac{x^2}{2} \quad -\sin(1)\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad -\cos(1)\tfrac{x^2}{2} \quad -\cos(1)\tfrac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad +\sin(1)\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad +o\left(x^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)x-\tfrac{\cos(1)+\sin(1)}{2}x^2-\tfrac{\cos(1)}{2}x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$
D'autre part, on a
$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x\left(1-x+x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o\left(x^3\right).$$
Posons $v(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o\left(x^3\right)$. On sait que $\tan(v) \underset{v\to 0}{=} v+\frac{v^3}{3}+o\left(v^3\right)$. Or

- $v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Comme $v(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $v(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc

$$v(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

- Enfin, $o\left(v(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) &\underset{x\to 0}{=} v(x) + \tfrac{v(x)^3}{3} + o\left(v(x)^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - x^2 \quad + x^3 \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\quad + \tfrac{x^3}{3} \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \tfrac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\mathrm{e}^x\right) + a\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \sin(1)x - \frac{\cos(1)+\sin(1)}{2}x^2 - \frac{\cos(1)}{2}x^3 + o\left(x^3\right) + ax - ax^2 + a\frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) + (a - \sin(1))\,x - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + a\right)x^2 + \left(\frac{4a}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(1) + (a - \sin(1))\,x - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + a\right)x^2 + \left(\frac{4a}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).}$$

2. Par la question précédente, pour que 0 soit un extremum (condition nécessaire) il faut que $a - \sin(1) = 0$. i.e.

$$\boxed{a = \sin(1).}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + \sin(1)\right)x^2 + \left(\frac{4\sin(1)}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2 + \frac{8\sin(1)-3\cos(1)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

En tronquant à l'ordre 2, on obtient que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

On obtient alors la condition suffisante : puisque $\frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2} > 0$, que $f(x) - \cos(1) = f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2$ et que deux équivalents ont même signe au voisinage considéré, on en déduit que au voisinage de 0, $f(x) \leqslant \cos(1) = f(0)$. Conclusion, dans ce cas,

$$\boxed{\text{si } a = \sin(1), \text{ alors } 0 \text{ est un maximum local de } f.}$$

Solution de l'exercice 2 Appliquons la règle du n^2. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad\qquad \text{car } n \neq 0.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$