EX1

On a : $u_n = \frac{f(n)}{n^{3/2}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe car f définie sur $\mathbb{R}_+$. ✓

f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ ✓

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, f(n)$$

Or $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Or la croissance de $\sqrt{n}$ est très "lente", elle serait prépondérante que si Faux f était la fonction $\ln$ mais comme f est définie et à valeur dans $\mathbb{R}_+$, f n'est pas $\ln$.

donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, f(n) = 0$ Non pas clair cf corrigé. n^2 ne marche pas ici il faut prendre plus petit.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$,

$$0 \leq n^2 u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

<u>EX2</u> Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, f injective.

Soient $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, procédons par double-inclusion.

- Soit $y \in f(A \cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B,\ f(x) = y$ oui

$\Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Leftrightarrow f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ ✓

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$ ✓

Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ TB

- Soit $y \in f(A) \cap f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ ✓

$\Leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$ et $\exists x' \in B,\ f(x') = y$ ✓

Or f est injective donc $f(x) = f(x') = y \Rightarrow x = x'$ oui

donc $\exists z \in A \cap B,\ f(z) = y$ ✓

$\Leftrightarrow f(z) \in f(A \cap B)$ ✓

$\Leftrightarrow y \in f(A \cap B)$ ✓

donc $(f(A) \cap f(B)) \subseteq f(A \cap B)$ Oui

Conclusion : On a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

donc $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)^2$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ TB