Correction Hiver 09
Séries et ensembles et applications

Solution de l'exercice 1 Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit notamment que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$. Par conséquent,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0, \qquad f(n) \leqslant 1.$$

De plus par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant f(n) \leqslant 1.$$

Par suite, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{3/2} > 0$,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n = \frac{f(n)}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Procédons par double inclusion. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A \cap B$, alors $x \in A$. Ainsi $y = f(x)$ est l'image d'un élément de $x \in A$. Donc $y \in f(A)$. De même puisque $x \in A \cap B$, alors $x \in B$ et donc $y = f(x)$ est l'image d'un élément de $x \in B$. Donc $y \in f(B)$. Par conséquent, $y \in f(A) \cap f(B)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in f(A \cap B)$, on a démontré que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Réciproquement, montrons que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$. En particulier $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective donc $\underbrace{x_1}_{\in A} = \underbrace{x_2}_{\in B}$. Donc $x_1 \in A \cap B$. Ainsi y est l'image d'un élément de $A \cap B$ et donc $y \in f(A \cap B)$.
Finalement $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et donc

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$