Exo hiver 10

Exo 1

on sait que la fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$ ✓
alors on peut écrire la somme S_n sous forme d'intégrale
tel que $\int_1^n \ln(x)\,dx$ — pas clair

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

on pose : $\forall x \in \dots$ $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x \end{cases}$ u et v sont C^1 et $\forall x \in \dots$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

par intégration par parties :

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x)\right]_{x=1}^{x=n} - \int_1^n \frac{1}{x} \times x \, dx$$

$$= n\ln(n) - 1\times\ln(1) - \int_1^n 1\,dx$$

$$= n\ln(n) - [x]_1^n$$

$$= n\ln(n) - n + 1 \quad ✓$$

d'où :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) - n + 1}$$

Exo 2 :

1. on remarque que :

- si $U_n > 0$; $e^{-U_n} > 0$ $U_{n+1} = U_n e^{-U_n} > 0$ ✓
- si $U_n < 0$ $e^{-U_n} > 0$; $U_{n+1} = U_n e^{-U_n} < 0$ ✓
- si $U_n = 0$; $U_n e^{-U_n} = 0 \times e^0 = 0$ ✓

Ainsi,

- si $U_0 > 0$; $U_1 > 0$, par récurrence tous les termes sont positifs
- si $U_0 < 0$; $U_1 < 0$, par récurrence tous les termes sont négatifs
- si $U_0 = 0$; $U_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ OK

Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit strictement croissante ?
soit nulle
soit strictement décroissante

Pas clair.

d'où $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de signe constant}}$

2. Montrons d'abord que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

1er cas : on a si : $U_n > 0$

$\Leftrightarrow e^{U_n} > 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{U_n}} < 1$ $e^{U_n} \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{-U_n} < 1$ direct

$\Leftrightarrow U_n e^{-U_n} < U_n$ car $U_n > 0$

$\Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$ ✓

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour $U_0 > 0$ Oui

d'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 ✓

- par le théorème de convergence monotone :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge Oui !

on note ℓ sa limite tel que:

lorsque $U_n \to +\infty$; $\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell(1-e^{-\ell}) = 0$ ✓

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $1 - e^{-\ell} = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = 0}$ Oui

$\boxed{\text{d'où } \lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$ Bien.

2ème cas : Si $U_n = 0$

la suite égale à zéro pour tout $n \in \mathbb{N}$ ✓

3. on a si $U_n < 0$

$\Leftrightarrow -U_n > 0$

$\Leftrightarrow e^{-U_n} > 1$ ✓ $\Rightarrow U_n e^{-U_n} < U_n$

car $U_n < 0$

donc $U_n < 0$; $U_{n+1} < 0$ ✓. $\Rightarrow \dots$

on suppose que la suite converge et sa limite vaut ℓ

par passage à la limite

$\ell = \ell e^{-\ell}$

$\Leftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$ ok