Exercice Hiver 10
Séries et suites

Solution de l'exercice 1 La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante sur $[1;+\infty[$. Donc par le théorème d'encadrement série-intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t) - t]_{t=1}^{t=n} = n\ln(n) - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) \\
\int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t) - t]_{t=2}^{t=n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n - 1 - 2\ln(2) + 2 \\
&= n\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1 \\
&= n\ln(n) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).
\end{aligned}$$

Donc par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).}$$

NB : puisque $(\ln(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (mais vers $+\infty$) on pouvait voir dès le départ que la série diverge grossièrement et donc diverge.

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « u_n est de même signe que u_0 ». Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie par récurrence.
   - *Initialisation.* Si $n = 0$, alors u_0 est de même signe que u_0 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n est de même signe que u_0. Or, par définition, $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$ et naturellement $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$. Donc u_{n+1} est de même signe que u_n et par transitivité, u_{n+1} est de même signe que u_0. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de même signe que u_0. Conclusion,

   $$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de signe constant,}}$$

   celui de u_0 notamment.
2. On suppose $u_0 \geqslant 0$. Donc par la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ i.e. $-u_n \leqslant 0$. Donc par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1$. Ainsi, $u_n\,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n$ car u_n est positif. Donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n.$$

Autrement dit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or cette suite étant positive elle est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\,\mathrm{e}^{-u_n} = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ en tant que suite extraite. Donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$ on en déduit que

$$\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\ell = 0\\ 1 = \mathrm{e}^{-\ell}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\ell = 0\\ \ell = -\ln(1) = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \ell = 0.$$

Conclusion, $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Alors d'après la question 1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1 && \text{par croissance de l'exponentielle}\\ &\Rightarrow \quad u_n\,\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n && \text{car} u_n \leqslant 0\\ &\Rightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à nouveau décroissante. Donc par le théorème de croissance monotone, deux cas sont possibles :

(i) la suite converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$,

(ii) la suite diverge vers $-\infty$.

Supposons que (i) est réalisé. Alors en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$, on en déduit comme précédemment que $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \;\Leftrightarrow\; \ell = 0$. Or on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 0$. Donc par passage à la limite dans cette inégalité on en déduit que

$$\ell \leqslant u_0 < 0.$$

NB : ATTENTION à ne pas dire $u_n < 0$ implique $\ell < 0$ qui est faux en général ! ! Exemple $u_n = -\frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc montré que $\ell = 0$ et $\ell < 0$ ce qui est contradictoire. Le cas (i) est donc impossible et donc (ii) est vraie : $\boxed{\text{si } u_0 < 0 \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty}$.