Exercice Hiver 11

1- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^n \neq 0$, donc u_n existe.

De plus, on a : $u_n = \frac{e^n}{n^n} = \left(\frac{e}{n}\right)^n$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ par croissance comparée. Bof ok

On peut dire que : $n^n = e^{n\ln(n)}$. oui

Donc :

$$\frac{e^n}{e^{n\ln(n)}} = e^{n - n\ln(n)}, \text{ or } n \ll n\ln(n) \text{ pour } n \to +\infty$$

On ne compose pas les équivalents.

~~Donc~~ $\cancel{u_n \sim e^{-n\ln(n)}}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-n\ln(n)} \geq 0$.

Non

On reconnaît une ~~série exponentielle~~, donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^n}{n^n} \text{ converge.}}$$

2- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg(P)$.

Si $P(X^3) = X^4 P(X)$, alors :

$$\deg(P(X^3)) = \deg(X^4 P(X)) \iff 3n = n + 4$$
$$\iff n = 2$$

Oui !

Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.

Alors on a les équivalences suivantes :

$$P(X^3) = X^4 P(X) \iff a_0 + a_1 X^3 + a_2 X^6 = X^4(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$$

Oui

$$\iff a_0 + a_1 X^3 + a_2 X^6 = a_0 X^4 + a_1 X^5 + a_2 X^6$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 0 = a_0 \\ 0 = a_1 \\ a_2 = a_2 \end{cases}$$ par unicité des coefficients d'un polynôme

Bien

$$\iff P = a_2 X^2$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par : TB

$$\boxed{S = \{ a_2 X^2 \mid a_2 \in \mathbb{R} \}} = \mathrm{Vect}(X^2)$$