Exercice Hiver 12
Séries et continuité-dérivabilité

Exercice 1 Soit f définie pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 2$.

Exercice 2 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. On pose également $g : \begin{array}{ccc}]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{x} \end{array}$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g la nouvelle fonction prolongée. Préciser $g(0)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $g'(c) = 0$.
3. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f en c passe par l'origine.