Correction Hiver 12
Séries et continuité-dérivabilité

Solution de l'exercice 1 On a pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2 \ln\left(\frac{1}{n}\right)} \cos(n) = -\frac{\cos(n)}{n^2 \ln(n)}.$$

Dès lors,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad |u_n| = \frac{|\cos(n)|}{n^2 |\ln(n)|} \leqslant \frac{1}{n^2 |\ln(n)|}.$$

Or pour tout $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$. Donc

$$\forall n \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\geqslant 2} |u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} && \text{car } f(0)=0 \\
&= f'(0) && \text{car on reconnait le taux d'accroissement de } f \text{ en } 0^+ \text{ et } f \text{ est dérivable en } 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ existe. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité.}}$$

De plus, en notant encore

$$g: \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

alors g est continue et

$$\boxed{g(0) = 0.}$$

2. Par la question précédente, la fonction g est continue sur $[0;1]$ et comme f est dérivable sur $[0;1]$, on en déduit que g est dérivable sur $]0;1]$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc g est notamment dérivable sur $]0;1[$. Enfin, on a $g(0)=0$ et

$$g(1)=\frac{f(1)}{1}=0.$$

Donc g est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et $g(0)=g(1)$. D'après le théorème de Rolle, on conclut que

$$\boxed{\exists c \in \left]0;1\right[, \qquad g'(c)=0.}$$

3. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe f et c. Puisque f est dérivable en $c \in]0;1[$, $\mathcal{T}$ a pour équation

$$\mathcal{T}: \qquad y=f'(c)\,(x-c)+f(c).$$

Or par la question précédente, $g'(c)=0$. De plus pour tout $x \in]0;1]$, on a

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}.$$

Donc

$$g'(c)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(c)c-f(c)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c)=f'(c)c.$$

Ainsi,

$$\mathcal{T}: \qquad y=f'(c)\,(x-c)+f'(c)c=f'(c)\,(x-c+c)=f'(c)x.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{T}\text{, la tangente à la courbe représentative de } f \text{ en } c\text{, est une droite qui passe bien par l'origine.}}$$