Exercice 1 :

$DL_2(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(2 + \arctan(x))$

$DL_2(0)$ de $\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x^2)$ ✓

$$\cancel{\ln\left(x\left(\frac{2}{x} + 1 + o(x^2)\right)\right)}$$

$\cancel{\text{On pose } u = 1 + \frac{2}{x} + o(x^2)}$

$f(x) \underset{x \to 0}{=} \ln\left(2\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right)\right)$ ✓

$\underset{x \to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right)$ ✓ Bien

On pose $u = \frac{1}{2}x + o(x^2)$ ✓

$u \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ important

$u^2 \underset{x \to 0}{=} \left(\frac{1}{2}x + o(x^2)\right)\left(\frac{1}{2}x + o(x^2)\right)$

$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ ✓

$o(u^2) = \ldots$ ← important

$\ln(1+u) \underset{x \to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ Oui !

$$\boxed{\ln(2) + \cancel{\ln(1+} \frac{1}{2}x - \left(\frac{\frac{1}{4}x^2}{2}\right) + o(x^2)\,)}$$

Exercice 2 : $(E) : \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = \frac{1}{x+3}$
sur $I =]-3;0[$.

Soit $(E) : \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = \frac{1}{x+3}$

Soit $(E_0) : \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = 0$ oui

On pose $a : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{x} \end{array}$ une fonction continue

sur I ✓ donc elle admet des primitives dont l'une est $A : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln(|x|) \end{array}$ Oui

On a les solutions sous formes $Ke^{-A(x)}$

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ke^{\ln(|x|)} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}$$ ✓

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Kx \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}$$ Bien.

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right)$$ ✓

Soit y...

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$ avec $y_0 : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ ✓

$\lambda(x)$ est dérivable sur I ✓ par quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda(x) y_0(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x)$ ✓

Donc :

y solution de $(E) \iff \forall x \in I,\ y'(x) + a(x) y(x) = b(x)$

$\forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + a(x) \lambda(x) y_0(x) = b(x)$

$\forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{(y_0'(x) + a(x) y_0(x))}_{= 0 \text{ car } y_0 \in S_0} = b(x)$

Oui !

$\Rightarrow \forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) = b(x)$ ✓

$\Rightarrow \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+3}}{x}$ ✓

$\Rightarrow \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \dfrac{1}{(x+3)x}$ ✓ TB.

Non à revoir.

$\Rightarrow \exists C \in I,\ \forall x \in I,\ \lambda(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x) + C$

On peut conclure :

$$S_E \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x) + C + Kx \end{array} \middle| (C, K) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$