Correction de l'exercice Noël 01
DL / Equations différentielle d'ordre 1

Solution de l'exercice 1 Puisque $2+\arctan(x)>0$ au voisinage de 0, la fonction f est bien définie et même $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 donc admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. De plus,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(2+x+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right).$$

On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) = \frac{x}{2} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + o\left(x^2\right)$.
- *Méthode 1.*

$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, alors $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$ i.e. $u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln(1+u(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) \quad + \tfrac{x}{2} \qquad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad - \tfrac{x^2}{8} \quad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).}$$

Solution de l'exercice 2 On note que les fonctions $a : x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x+3}$ sont continues sur **l'intervalle** $I =]-3;0[$. Donc l'équation (E) admet des solutions.
La fonction a est continue sur I donc admet des primitives sur I dont l'une est donnée par $A : x \mapsto -\ln(|x|) = -\ln(-x)$. Donc pour tout $x \in I$, $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\ln(-x)} = -x$.
Donc l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right).$$

Nous avons glissé le $-$ dans la constante C.
Procédons désormais à la méthode de variation de la constante. Posons :

- $y_0 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur I.
- y une fonction dérivable sur I.

- $\lambda = \frac{y}{y_0}$ car pour tout $x \in I$, $y_0(x) \neq 0$. Autrement dit $y = \lambda\, y_0$. La fonction λ est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont.

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = \frac{1}{x+3}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) - \frac{1}{x}\lambda(x) y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \frac{1}{x+3}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) x = \frac{1}{x+3}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x\,(x+3)} \qquad \text{car } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Or par le théorème de décomposition en éléments simples,

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;0\}, \qquad g(x) = \frac{1}{x\,(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3}.$$

On a

$$a = \lim_{x \to 0} g(x) x = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{x \to -3} g(x)\,(x+3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;0\}$,

$$g(x) = \frac{1}{x\,(x+3)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\,(x+3)}.$$

On vérifie de tête que cela fonctionne par une mise au même dénominateur. Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x\,(x+3)}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\,(x+3)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{1}{3}\ln(|x|) - \frac{1}{3}\ln(|x+3|) + C = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C\\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C\right) x.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C\right) x \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Pas d'espace vectoriel ici naturellement.