Exercice 1 :

Ndiaye Diop
Koné

$DL_3(0)$ de $f : x \longmapsto ch\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$

Soit $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x} = x\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

or $x\left(\dfrac{1}{1+x}\right) \underset{x \to 0}{=} x\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)$

$x\left(\dfrac{1}{1+x}\right) \underset{x \to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3)$

On a alors $x \longmapsto ch\left(x - x^2 + x^3 + o(x^3)\right)$

Posons $u = x - x^2 + x^3 + o(x^3) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ oui

or $ch(u) \underset{u \to 0}{=} 1 + \dfrac{u^2}{2} + o(u^3)$

$$
\begin{aligned}
u^2 &= \left(x - x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o(x^3)\right) \\
&= x^2 - x^3 + o(x^3) \\
&\quad - x^3 + o(x^3) \\
&\quad + o(x^3)
\end{aligned}
$$

$u^2 = x^2 - 2x^3 + o(x^3)$ TB

$$
\begin{aligned}
u^3 &= \left(x^2 - 2x^3 + o(x^3)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o(x^3)\right) \\
&= x^3 + o(x^3) \\
&\quad + o(x^3)
\end{aligned}
$$

$u^3 = x^3 + o(x^3)$.

$o(u^3) = o\left(x^3 + o(x^3)\right) = o(x^3)$ Oui !

$\mathrm{ch}(x - x^2 + x^3 + o(x^3)) \underset{x=0}{=} 1 + \frac{x^2 - 2x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3)$ ✓

$\underset{x=0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)$ ✓

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{ch}\left(\frac{x}{1+x}\right) \underset{x=0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)}$ TB !

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 5X + 4$

1) $P(A) = A^2 - 5A + 4I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$ ✓

$P(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} + 4I_2$

$P(A) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 4I_2$ ✓

$\boxed{P(A) = -4I_2 + 4I_2}$ $\boxed{P(A) = 0_2}$ Oui

2) on a $A^2 - 5A = -4I_2$, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$

pas clair

$A^{-1}A^2 - 5A^{-1}A = -4A^{-1}I_2$

$I_2 A - 5I_2 = -4A^{-1}$

Revoir la rédaction

$$A - 5 I_2 = -4 A^{-1}$$

$$A - 5 I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 5 I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $-4 A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Conclusion} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$ ✓

Vérification :

$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ Oui

3)

Pour $n \geq 2$. $\deg (X^n) \geq \deg (X^2 - 5X + 4)$

il existe $Q(X)$ et $R_n(X)$ avec $\deg(Q(X)) = n-2$ oui

et $\deg(R_n(X)) \leq 1$

donc $R_n(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on a $X^n = Q(X)(X^2 - 5X + 4) + R_n(X)$ ✓

$X^n = Q(X)(X^2 - 5X + 4) + aX + b$ ✓

(Posons $X^2 - 5X + 4 = 0$)

on a donc $(X^2 - 5X + 4) = (X-1)(X-4)$ ✓

car $(1 \times 4) = 4$ et $(1+4) = 5$

Pour $x = 1$

$1^n = Q_1(x)(0) + a(1) + b$

$a + b = 1$

Pour $x = 4$

$4^n = Q_2(x)(0) + a(4) + b$

$4a + b = 4^n$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 4a + b = 4^n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 4(1-b) + b = 4^n \end{cases}$$

Ce n'est pas du pivot...

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ -3b = 4^n - 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \dfrac{4-4^n}{3} \\ b = \dfrac{4-4^n}{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1+4^n}{3} \\ b = \dfrac{4-4^n}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } R_n(x) = \left(\frac{4^n-1}{3}\right)x + \frac{4-4^n}{3} \quad \forall n \geq 2}$$

4) On sait que $A^2 - 5A + 4I_2 = 0_2$

donc $\forall n \geq 2$ $\quad A^n = Q(A)(A^2 - 5A + 4I_2) + \left(\frac{4^n-1}{3}\right)A + \left(\frac{4-4^n}{3}\right)I_2$

oui

4)

$$A^n = Q(A)\underbrace{(A^2-5A+4I_2)}_{=O_2} + \left(\frac{4^n-1}{3}\right)A + \left(\frac{4-4^n}{3}\right)I_2$$

$$A^n = \left(\frac{4^n-1}{3}\right)A + \left(\frac{4-4^n}{3}\right)I_2$$ TB

$$A^n = \frac{4^n-1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{4-4^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{-4^n+1}{3} \\ \frac{2-(2\times 4^n)}{3} & \frac{(2\times 4^n)+1}{3} \end{pmatrix}$$ TB !

Vérification

si $n = 1$ $\quad A^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ok !

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \geq 2 \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{-4^n+1}{3} \\ \frac{2-(2\times 4^n)}{3} & \frac{(2\times 4^n)+1}{3} \end{pmatrix}}$$