Correction de l'exercice Noël 02
DL / Matrices

Solution de l'exercice 1 La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ et ch sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de Taylor-Young, f admet un développement à l'ordre 4 en 0.
On a

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

Posons $u(x) = x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} x^2 & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Poursuivons,

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $\mathrm{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{ch}\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}.$$

   Donc

$$P(A) = A^2 - 5A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{P(A) = O_2.}$$

2. Par la question précédente que $A^2 - 5A + 4I_2 = O_2$ et donc $A(A - 5I_2) = -4I_2$ ou encore
$$A\left(\frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A\right) = I_2.$$
Par conséquent, A est inversible et $A^{-1} = \frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A$ i.e.
$$A^{-1} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$
Conclusion, $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et
$$\boxed{A^{-1} = \frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe Q_n et R_n deux polynômes tels que
$$X^n = Q_nP + R_n \qquad \text{avec} \qquad \deg(R_n) < \deg(P) = 2.$$
Donc $\deg(R_n) \leqslant 1$ i.e. il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_nX + b_n$. On a donc
$$X^n = Q_n\left(X^2 - 5X + 4\right) + a_nX + b_n.$$
Or le discriminant de P est $\Delta = 25 - 16 = 9$. Donc les racines de P sont $\frac{5+3}{2} = 4$ et $\frac{5-3}{2} = 1$ (évident : la somme faisant 5 et le produit 4). En évaluant en ces racines on obtient alors le système suivant :
$$\begin{cases}1^n = a_n + b_n\\ 4^n = 4a_n + b_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1^n = a_n + b_n\\ 4^n - 1 = 3a_n\end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b_n = 1 - a_n = \frac{3-4^n+1}{3} = \frac{4-4^n}{3}\\ a_n = \frac{4^n-1}{3}\end{cases}$$
Conclusion, le reste de la division euclidienne de X^n par P est
$$\boxed{R_n = \frac{4^n - 1}{3}X + \frac{4 - 4^n}{3}.}$$

4. En évaluant $X^n = Q_nP + R_n$ en A, on a
$$\begin{aligned}A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) &= 0_2 + aA + bI_2 \qquad \text{d'après la question 1}\\ &= \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_2\\ &= \frac{4^n - 1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} + \frac{4 - 4^n}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n + 2 & 1 - 4^n\\ 2 - 2\times 4^n & 2\times 4^n + 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n + 2 & 1 - 4^n\\ 2 - 2\times 4^n & 2\times 4^n + 1\end{pmatrix}.}$$
On vérifie son résultat. Si $n = 0$,
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n + 2 & 1 - 4^n\\ 2 - 2\times 4^n & 2\times 4^n + 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = I_2 \ \mathit{OK}.$$
Si $n = 1$,
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n + 2 & 1 - 4^n\\ 2 - 2\times 4^n & 2\times 4^n + 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -3\\ -6 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} \ \mathit{OK!}$$