Exercice Noël 03

{A. Asym}

① Soit $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, f existe $\Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0$ et $\sqrt{1+x^2}+x > 0$ ✓

$\Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \geq 0$ et $\sqrt{1+x^2}+x > 0$ ✓

On résout $\sqrt{1+x^2}+x > 0$ avec $\sqrt{1+x^2}$ toujours positif

Si $x > 0$; $\sqrt{1+x^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x > 1+x$ car $(1+x^2 \geq 1)$ ✓

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x > 1+x > 0$ ✓

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x > 0$ ✓

Si $x < 0$; $1+x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$ ✓

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x > x+|x|$ ✓

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x > 0$ (car $|x| = -x$) oui !

d'où $\sqrt{1+x^2}+x > 0$ dans les deux cas TB

alors $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$ ✓

Mq f est impair — $\mathbb{R}$ est centré en 0 ⚠

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ ✓

Comparons $f(-x)$ et $-f(x)$

$-f(x) = -\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ ✓

$= \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)$ ✓

$= \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2-x^2}\right)$ ✓ $= \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ ✓ $= f(-x)$

d'où $\boxed{f \text{ est impair}}$ Bien

② ⓐ on $f: x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

on a : f est C^4 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont Non pas clair.

donc par le théorème de Taylor-Young oui

f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0

$\exists (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$;

on a : $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$ ✓

b) ?

③ on a : $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} (1+x^2)^{1/2}$

$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} x^4 + o(x^4)$ ✓

$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ ✓

$\sqrt{1+x^2} + x \underset{x\to 0}{=} 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}}_{} + o(x^4)$ ✓

oui

et on a : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$

posons $u = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ oui

$u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$= x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$

$+ \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ ✓

$+ o(x^4)$

$= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ ✓

$u^3 = \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$= x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$+ x^4 + o(x^4)$ ✓

$+ o(x^4)$

$= x^3 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)$ ✓

$u^4 = \left(x^3 + 3\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$= x^4 + o(x^4)$ ✓

d'où $o(u^4) = o(x^4)$ oui

donc $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

$- \cancel{\frac{x^2}{x}} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

$+ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{6} + o(x^4)$ ✓

$- \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

d'où :

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^4}{8}} + o(x^4)}$$

4) on a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

on derive ???? A revoir cf exemple 34.

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

5) a) on a : $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)'}{\sqrt{1+x^2}+x}$$ ✓

on a $g(x) = \sqrt{1+x^2}+x$

$$g'(x) = \frac{\cancel{(1+x^2)'}}{2\sqrt{1+x^2}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

x ?

d'où $$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$ ✓

b)

(5) On a : $f(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

Soit f' et $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ car f l'est aussi ✓

Donc par le théorème de Taylor young

f' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 Oui !

$\exists (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$; $f'(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$

Avec f une primitive de f' sur $\mathbb{R}$ ✓

Donc par le théorème de primitivation du Développement limité

$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ Bien.

Par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -\frac{1}{2} \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$ Rapide.

Conclusion : $\cancel{f'(x) = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)}$

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$ Bien.