Correction de l'exercice Noël 03
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. Montrons que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. Donc $\sqrt{1+x^2}$ existe de plus on a
$$\sqrt{1+x^2}+x>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x<\sqrt{1+x^2}.$$
Premier cas, $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$ et donc par la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2}+x>0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-x)^2<1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2<1+x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0<1 \quad \text{toujours vraie.} \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{S}_1=\mathbb{R}_+$. *Deuxième cas*, $x>0$, alors $-x<0 \leqslant \sqrt{1+x^2}$. Donc $\mathscr{S}_2=\mathbb{R}_-^*$.
Donc globalement, $\mathscr{S}=\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2=\mathbb{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2}+x>0$. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$
Montrons que f est impaire. On sait déjà que f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} -f(x) &= -\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2-x^2}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}-x\right) \\ &= f(-x). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$
2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x^2>0$. Or la fonction racine carrée est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composée, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. Donc par somme, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}+x$ est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. Or on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2}+x>0$ et la fonction ln est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composée, la fonction f est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. PAr le théorème de Taylor-Young,
$$\boxed{f \text{ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.}}$$
On le note $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o\left(x^4\right)$.

   (b) Par la question **??** la fonction f est impaire. Comme le développement limité est en 0, on en déduit que f admet que des puissances impaires dans son développement limité :
$$\boxed{a_0=a_2=a_4=0.}$$

3. On sait que

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^4+o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sqrt{1+x^2}+x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right) \boxed{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

- On a,

$$\begin{aligned}u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x^2 & +\frac{x^3}{2} & & +o\left(x^4\right)\\ & +\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right)\\ & & & +o\left(x^4\right)\end{array}\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} u(x)u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} x^3 & +x^4 & +o\left(x^4\right)\\ & +\frac{x^4}{2} & +o\left(x^4\right)\\ & & +o\left(x^4\right)\end{array}\\ &\underset{x\to 0}{=} x^3+\frac{3}{2}x^4+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

- *Méthode 1*, mais aussi, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par élévation à la puissance, $u(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right)$.
  Méthode 2, mais aussi,

$$\begin{aligned}u(x)^4 &\underset{x\to 0}{=} u(x)^2u(x)^2\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

- Enfin, $o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Dès lors, on obtient,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1+u(x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{3} - \frac{u(x)^4}{4} + o\left(u(x)\right)^4 \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llllll} x & +\frac{x^2}{2} & & & -\frac{x^4}{8} & +o\left(x^4\right) \\ & -\frac{1}{2}(x^2 & +x^3 & & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right)) \\ & & +\frac{1}{3}(x^3 & & +\frac{3}{2}x^4 & +o\left(x^4\right)) \\ & & & & -\frac{1}{4}(x^4 & +o\left(x^4\right)) \\ & & & & & +o\left(x^4\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll} x & +\frac{x^2}{2} & & -\frac{x^4}{8} & +o\left(x^4\right) \\ & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{2} & -\frac{x^4}{8} & +o\left(x^4\right) \\ & & +\frac{x^3}{3} & +\frac{x^4}{2} & +o\left(x^4\right) \\ & & & -\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right) \\ & & & & +o\left(x^4\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).}$$

On retrouve bien que $a_0 = a_2 = a_4 = 0$.

4. Sans calculer f', déterminons le développement limité de f' à l'ordre 3. On a vu que f est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Taylor-Young, f' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 : il existe $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$

Par le théorème de primitivation du développement limité,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + b_0 x + b_1 \frac{x^2}{2} + b_2 \frac{x^3}{3} + b_3 \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Or par la question précédente,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on obtient,

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ok} \\ b_0 = 1 \\ \frac{b_1}{2} = 0 \\ \frac{b_2}{3} = -\frac{1}{6} \\ \frac{b_3}{4} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 = b_3 = 0 \\ b_0 = 1 \\ b_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).}$$

5. (a) Calculons f'. On a vu que la fonction f est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)'}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \frac{\frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

(b) Retrouvons le $DL_3(0)$ de f'. On a par la question précédente,

$$f(x) = \left(1+x^2\right)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question **??**

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).}$$