Exercice n°3

1) Soit $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

f est définie sur $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} + x > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ et $\sqrt{1+x^2} > x$ Non démontré.

donc $\sqrt{1+x^2} + x > 0$

$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$

$f(-x) = \ln(\sqrt{1-x^2} - x))$ $\mathbb{R}$ centré en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x)}{(\sqrt{1+x^2} + x)}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$$ oui

donc $f(-x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}\right)$

$f(-x) = -\ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

$f(-x) = -f(x)$ TB

$\boxed{f \text{ est impaire}}$ Oui

2) (a) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ ~~donc~~ Pas clair d'après?
admet un developpement limité d'ordre 4 en 0

(b) f est impaire donc tout~~s~~ ses terme~~s~~ paires sont égaux à 0 soit oui !

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_4 &= 0 \end{aligned}}$$ ✓

3) $\ln(1+u) \underset{x\to 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$ oui

$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^4 + o(x^4)$ ✓ car $x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$ ✓

$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ Oui

$\sqrt{1+x^2} + x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ ✓

On pose $u = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ oui

$u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$= x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$ ✓

$+ \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ ✓

$= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ ✓

$u^3 = \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$= x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^4 + o(x^4)$

$u^4 = (x^4) + o(x^4)$ ✓ $\qquad o(u^4) = o(x^4)$ ✓

$\ln(\sqrt{1+x^2} + x) \underset{x\to 0}{=} x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

$- \cancel{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$

$$+\frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left((x^4) + o(x^4)\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8}$$

$$+\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

A corriger.

$$\underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^3-3x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \left(\frac{-x^4}{4}\right) + o(x^4)$$

$$\boxed{= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}$$

4) $f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{3x^2}{6} - \frac{4}{4}x^3 + o(x^3)$

Parachutage. Cf exemple 34.

$$= \boxed{1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)}$$

5) (a) $f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)'}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$= \frac{\frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}\left(\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Bien !

Faire $(1+u)^{\alpha}$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, plus rapide !

(b) $\frac{1}{1+u} \underset{x \to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$ ✓

$\sqrt{1+x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ ✓

$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ ✓

On pose $u = \frac{x^2}{2} + o(x^3) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ oui

$u^2 = o(x^3)$ ✓ $\qquad o(u^3) = o(u^2)$ ✓

$u^3 = o(x^3)$ ✓

$u^4 = o(x^3)$ ✓

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

TB