1) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{\frac{x^2}{x+x^2}} = e^{\frac{x}{1+x}}$ ✓

on pose $U = \frac{x}{1+x}$

Il faut commencer par faire le DL de u.

$U \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ OK

On a $U = \frac{x}{1+x}$

donc $U^2 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 = \frac{x^2}{(1+x)^2}$

$U^3 = \frac{x^3}{(1+x)^3}$

$o(U^3) = o\left(\frac{x^3}{(1+x)^3}\right)$

On $e^U \underset{u \to 0}{=} 1 + U + \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{6} + o(U^3)$

on a $U \in \mathbb{Z}$

donc $e^{\frac{x}{1+x}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{6(1+x)^3} + o\left(\frac{x^3}{(1+x)^3}\right)$

2) On a $z^{14} - (3+i)z^7 + 4 = 0 \Longleftrightarrow (z^7)^2 - (3+i)z^7 + 4 = 0$

Bien

on pose $t = z^7$ ✓

donc $(z^7)^2 - (3+i)z^7 + 4 = 0 \Longleftrightarrow t^2 - (3+i)t + 4 = 0$ ✓

$\Delta = (3+i)^2 - 4 \times 4$

$\Delta = -8 + 6i$ ✓

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$

on pose Gmd: $\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \\ ab = 3 \end{cases}$ ✓

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \\ ab = 3 > 0 \end{cases}$ ✓

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ Car $ab \geq 0$

oui

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ alors f continue sur I
donc f continue en 0
donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

posons $\delta = 1 + 3i$ alors :

$$t = \frac{3+i-1-3i}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{3+i+1+3i}{2}$$

$$t = \frac{2-2i}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{4i+4}{2}$$

$$t = 1 - i \quad \text{ou} \quad t = 2 + 2i$$

donc $z^7 = 1 - i$ ou $z^7 = 2 + 2i$

$z^7 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $z^7 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Reprendre la fin

donc $z = \sqrt[7]{\sqrt{2}}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$ $/ \exists k \in [\![0, 6]\!]$

Bien

ou

$z = \sqrt[7]{\sqrt{8}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$