Correction de l'exercice Noël 04
DL / Equations complexes

Solution de l'exercice 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{x^2}{x+x^2} = \frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x\left(1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

Posons $u(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- Puis,

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} (x - x^2 + x^3 + o(x^3))(x - x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -x^3 \quad +o(x^3) \\
&\qquad\quad\ \ -x^3 \quad +o(x^3) \\
&\qquad\qquad\qquad +o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

- *Méthode 1.*

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} u(x)^2 u(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} e^{x - x^2 + x^3 + o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x \quad -x^2 \quad +x^3 \quad +o(x^3) \\
&\qquad\qquad\ \ +\tfrac{x^2}{2} \quad -x^3 \quad +o(x^3) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad\ \ +\tfrac{x^3}{6} \quad +o(x^3) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\omega = z^7$. On a alors les équivalences suivantes :

$$(E): \quad z^{14} + 4 = (3+i)\,z^7 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 + 4 = (3+i)\,\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 - (3+i)\,\omega + 4 = 0.$$

Soit Δ le discriminant du polynôme $\omega^2 - (3+i)\,\omega + 4$. On a

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = 9 + 6i - 1 - 16 = -8 + 6i \neq 0.$$

Le complexe Δ étant non nul, possède deux racines complexes distinctes. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = \Delta \\ |x+iy|^2 = |\Delta| \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique d'un complexe} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 = -8 + 10 \qquad (L_1 + L_3) \\ xy = 3 \\ 2y^2 = 10 + 8 \qquad (L_3 - L_1) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 3 \\ \text{OU} \\ x = -1 \text{ et } y = -3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta = 1 + 3i \\ \text{OU} \\ \delta = -1 - 3i \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que les racines du polynôme $\omega^2 - (3+i)\,\omega + 4$ sont

$$\omega_1 = \frac{3+i+1+3i}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{3+i-1-3i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega = 2 + 2i \\ \text{OU} \\ \omega = 1 - i \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^7 = 2 + 2i \\ \text{OU} \\ z^7 = 1 - i \end{cases}
\end{aligned}$$

- Déterminons les racines $7^{\text{ièmes}}$ de $2 + 2i$. On a $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 2 + 2i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad z = \sqrt[7]{2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} = 8^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}.$$

- Déterminons les racines $7^{\text{ièmes}}$ de $1 - i$. On a $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 1 - i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad z = \sqrt[7]{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} = 2^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}.$$

De ces études, on en déduit que

$$\boxed{z^{14} + 4 = (3+i)\,z^7 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 8^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}, 2^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} \right\}.}$$