Exercice Noël 04
DL / Equations complexes

Exercice 1 $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x+x^2}}$.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^{14} + 4 = (3+i)\, z^7.$$

exc 1 : $e^{\frac{x^2}{x+x^2}} = e^{\frac{x^2}{x(1+x)}} = e^{x\frac{1}{1+x}}$ ✓

??? $\underset{x\to 0}{\approx} e^{x(1+x+x^2+o(x^2))}$ Non

$\underset{x\to 0}{\cancel{\approx}} e^{x+x^2+x^3+o(x^3)}$

posons $U = x+x^2+x^3+o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$U^2 = x^2+2x^3+o(x^3)$ ✓

$U^3 = x^3+o(x^3)$

$o(U^3) = o(x^3+o(x^3)) = o(x^3)$ ✓

donc $e^{\frac{x^2}{x+x^2}} \underset{x\to 0}{\cancel{\approx}} 1+x+x^2+x^3+\frac{x^2+2x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ A justifier

$\underset{x\to 0}{\cancel{\approx}} 1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{13x^3}{6}+o(x^3)$ ✓ Cohérent

exc 2 : soit $z \in \mathbb{C}$, $z^{14}+4 = z^7(3+i)$

posons $\cancel{\forall z \in} \mathbb{C}$, $X = z^7$, on a : $X^2 - X(3+i) + 4 = 0$ ✓

soit Δ le discriminant de $X^2-(3+i)X+4$

$\Delta = (3+i)^2 - 4\times 4$

$= 9+6i-1-16$ ✓

$= -8+6i$ ✓

soit $\delta^2 = \Delta$ on a $\delta = x + iy$

donc $\delta^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ ✓

on a donc, par l'unicité de la forme algébrique on a : oui !

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y = 18 \\ xy = 3 \end{cases}$$ ✓

Or $xy = 3 > 0$ donc $x = 1$ et $y = 3$

ou $x = -1$ et $y = -3$ ✓

On a donc $x_1 = \dfrac{3+i+1+3i}{2} = 2+2i$

$x_2 = \dfrac{3+i-1-3i}{2} = 1-i$ ✓

donc $x_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $x_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ oui

Or $x_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = z_1^7$

$\exists k \in \ldots$

donc $z_1 = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{7}} e^{i\left(\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$ Oui

Or $x_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = z_2^7$

donc $z_2 = 2^{\frac{1}{14}} e^{-i\left(\frac{\pi}{28} - \frac{2k\pi}{7}\right)}$ ✓

donc $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 8^{\frac{1}{14}} e^{i\left(\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)} ; 2^{\frac{1}{14}} e^{-i\left(\frac{\pi}{28} - \frac{2k\pi}{7}\right)} \right\}$ TB !