Brigitte Badji

Exercice 1 : $DL_3(0)$ de $f : x \to \sqrt{\cos x}$

$$\cos x \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$ ✓

Posons $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ oui

non

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \left(-\frac{1}{8}\right)u^2 - \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$$

$$u^2 \underset{u \to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{u \to 0}{=} o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)$$ ✓

$$u^2 \underset{u \to 0}{=} o(x^3)$$

$$u^3 \underset{u \to 0}{=} o(x^3)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{u \to 0}{=} o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)$$ ✓

$$u^3 \underset{u \to 0}{=} o(x^3)$$

$$o(u^3) \underset{u \to 0}{=} o(o(x^3)) = o(x^3)$$ ✓

$$\sqrt{\cos x} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$ Oui A encadrer.

Exercice 2 : A l'aide d'un changement de variable puis d'une intégration par parties, calculer $I = \int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$

$I = \int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$

$\forall t \in [1, 4]$, Posons $x = \sqrt{t}$ ✓ $\Rightarrow x^2 = t$ ✓

Si $t = 1$, $x = 1$     si $t = 4$, $x = 2$ ✓

Hypothèse ?

$\forall t \in [1;4]$, $dt = 2x\,dx$

Donc par le théorème de changement de variable

$$I = \int_1^2 2x e^x \,dx$$
$$= 2\int_1^2 x e^x \,dx$$

$\forall x \in [1;2]$, Posons $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$

$u$ et $v$ $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ et

$\forall x \in [1;2]$, Posons $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ✓

Donc par l'intégration par parties

$$I = 2\left([x e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x \,dx\right)$$
$$= [x e^x]_1^2 - [e^x]_1^2 \quad ✓$$
$$= 2e^2 - \cancel{e} - e^2 + \cancel{e} \quad ✓$$

$I = e^2$ Bien. A encadrer.