Correction de l'exercice Noël 05
DL / Primitives

Solution de l'exercice 1 La fonction cos est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$. Donc la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ qui est un voisinage de 0. Notamment f est $\mathscr{C}^3$ au voisinage de 0 donc par la formule de Taylor-Young, admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2}.$$

Posons $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- Enfin,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + o\left(u^2\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \tfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x^2}{4} \quad + o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad + o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right).}$$

NB : il était important de bien aller à l'ordre u^2 dans le DL de $(1+u)^{1/2}$. En effet, de l'ordre u aurait amener $o(u) \underset{x\to 0}{=} o\left(-\frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ qui est prépondérant devant $o\left(x^3\right)$ et ne permet donc pas de conclure. Erreur subtile mais courante...

Solution de l'exercice 2 La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc notamment sur $[1;4]$ donc I existe. Posons pour tout $t \in [1;4]$, $s = \sqrt{t}$ i.e. $t = s^2$. La fonction $s \mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$. Donc par le théorème de changement de variable

$$I = \int_1^2 e^s\, 2s\,\mathrm{d}s = 2\int_1^2 s\,e^s\,\mathrm{d}s.$$

Posons,

$$\forall s \in [1;2[\,, \qquad \begin{cases} u(s) = e^s \\ v(s) = s \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall s \in [1;2[\,, \qquad \begin{cases} u'(s) = e^s \\ v'(s) = 1 \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$I = 2\left([s\,\mathrm{e}^s]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\right) = 2\left(2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^2\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 2\,\mathrm{e}^2\,.}$$