Exercice Noël 05
DL / Primitives

Exercice 1 $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$

Exercice 2 A l'aide d'un changement de variable puis d'une intégration par parties calculer $I = \int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$.

1/ On cherche $DL_3(0)$ de $\sqrt{\cos(x)}$

On a donc $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ ✓

On a donc $\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$ ✓

On pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ oui

On a alors $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2}$ ✓

$$\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}u^3 + o(u^3)$$ ✓

Calculs de u^2 et u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2$$ ✓

donc $u^3 = o(x^4)$

écris plus pour éviter les erreurs

NON

$$= -\frac{x^4}{4} + \left(\frac{x^6}{576} + (o(x^4))^2\right)$$ $o(x^4)$

$$= -\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

On remplace dans l'expression précédente :

$$1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\right)}{2}\,\frac{x^4}{4} + o(x^4) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}\right)}{6} \times o(x^4) + o(x^4)$$

Le résultat est donc :

$$\boxed{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) + \frac{x^4}{32} + o(x^4)}$$ $o(x^3)$

2/ On a $I = \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$

On pose $u = \sqrt{t}$, par un changement de variable on a :

$$\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} e^u du^2$$

A mieux rédiger. Cf corrigé.

$$= \int_1^2 e^u \, 2u du$$

Procédons maintenant par intégration par partie :

Rédaction ???

$$\int_1^2 \underbrace{e^u}_{\geq 0} 2u du = [e^u \cdot u^2]_1^2 - \int_1^2 du e^u 2u$$

Non à revoir

$$= (e^2 \times 2^2 - e^1 \times 1^2) - [e^u 2u]_1^2$$

$$= (e^2 \times 4 - e) - [e^u u^2]_1^2$$

$$= 4e^2 - e \cancel{- 4e^2} - e^1 \times 1$$

$$= -2e$$

impossible

On a donc $\boxed{\int_1^2 e^u \, 2u du = -2e}$