Exo 1 : on a $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$

on pose $DL_3(0)(x^2+1) = x^2+1$

$\iff$ et $\dfrac{1}{2+2x+x^2} = \dfrac{1}{2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}$ oui

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

Bien $$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}$$

on pose $y = x + \dfrac{x^2}{2}$ donc on a : $\dfrac{1}{1+y} \cdot \dfrac{1}{2}$

$y \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ⚠

on a : $DL_3(0)\left(\dfrac{1}{1+y}\right) \underset{y\to 0}{=} 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)$

oui

donc $DL_3(0)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+y}\right) \underset{y\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y^3}{2} + o(y^3)$

alors $DL_3(0)\left(\dfrac{1}{2+2x+x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4}\right) \cancel{+ \dfrac{x^3}{2}} + o(x^4)$

A bien revoir.

Donc : $DL_3(0)\left(\dfrac{x^2+1}{2+2x+x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} (x^2+1)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^4)\right)$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3x^2}{4} + o(x^4)$$

Exo 2 : on a $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \leq 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \leq 2 \iff \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \text{et} \\ x-4\sqrt{x-4} \geq 0 \\ \text{et} \\ x-4\sqrt{x-4} \leq 4 \end{cases}$$

✓ ✓ OK !

on pose $X = \sqrt{x-4}$

$$\iff x-4 = X^2 \qquad \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \text{et} \\ X^2+4-4X \geq 0 \\ \text{et} \\ X^2-4X \leq 0 \end{cases}$$

$\iff x = X^2+4$

✓ ✓ oui

Or : $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2 \geq 0$ ⚠

et $X^2 - 4X = X(X-4)$ ✓

donc $X(X-1) \leq 0 \iff X \leq 0$ et $X-2 \geq 0$?

ou

$X \geq 0$ et $X-4 \leq 0$

Pourquoi cette inéquation ?

⚠ $\iff 0 \leq X \leq 4$

$\iff 0 \leq \sqrt{x-4} \leq 4$ ✓

$\iff 0 \leq x-4 \leq 16$ car...

$\iff 4 \leq x \leq 20$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions

d'où $x \in \mathcal{S} \iff 4 \leq x \leq 20$ Pas clair du tout

Réciproquement $x \in [4;20] \Rightarrow x \in \mathcal{S}$

d'où $\mathcal{S} = [4;20]$

D'où l'importance de raisonner par équivalents.

Bien.