Correction de l'exercice Noël 06
DL / Calculs dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1 Au voisinage de 0, on a

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+1}{2}\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $u(x)=x+\frac{x^2}{2}$. On a

- $u(x)=x+\frac{x^2}{2}$
- Puis,
$$u(x)^2=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2=x^2+x^3+\frac{x^4}{4}\underset{x\to0}{=}x^2+x^3+o\left(x^3\right).$$
- *Méthode 1.*
$$u(x)^3\underset{x\to0}{=}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x^2+x^3+o\left(x^3\right)\right)\underset{x\to0}{=}x^3+o\left(x^3\right).$$
Méthode 2. Puisque $u(x)\underset{x\to0}{\sim}x$, on en déduit que $u(x)\underset{x\to0}{\sim}x^3$ i.e. $u(x)^3\underset{x\to0}{=}x^3+o\left(x^3\right)$.
- Enfin,
$$o\left(u(x)^3\right)\underset{x\to0}{=}o\left(x^3+o\left(x^3\right)\right)\underset{x\to0}{=}o\left(x^3\right).$$

Or $\frac{1}{1+u}\underset{u\to0}{=}1-u+u^2-u^3+o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}&\underset{x\to0}{=}\frac{1}{1+u(x)}\\&\underset{x\to0}{=}1-x\quad-\tfrac{x^2}{2}\\&\qquad\qquad+x^2\quad+x^3\quad+o\left(x^3\right)\\&\qquad\qquad\qquad\quad-x^3\quad+o\left(x^3\right)\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+o\left(x^3\right)\\&\underset{x\to0}{=}1-x+\tfrac{x^2}{2}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}f(x)&\underset{x\to0}{=}\frac{x^2+1}{2}\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}\\&\underset{x\to0}{=}\left(\frac12+\frac{x^2}{2}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\\&\underset{x\to0}{=}\frac12-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o\left(x^3\right)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\\&\underset{x\to0}{=}\frac12-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0}{=}\frac12-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par observer que

$$x-4 \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x-4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 4.$$

Soit maintenant $x \in [4;+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \text{ existe} \quad & \Leftrightarrow \quad x-4\sqrt{x-4} \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x \geqslant 4\sqrt{x-4} \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 \geqslant 16\,(x-4) \qquad \textit{car } x \geqslant 4 \geqslant 0 \textit{ et } x-4 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 - 16x + 64 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x-8)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie on en déduit que pour tout $x \geqslant 4$, $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ existe. Ainsi, l'inéquation (I) : $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \leqslant 2$ est bien définie sur $[4;+\infty[$.
Fixons maintenant $x \in [4;+\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \leqslant 2 \\
& \Leftrightarrow \quad x-4\sqrt{x-4} \leqslant 4 \qquad \textit{car on a vu que } x-4\sqrt{x-4} \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x-4 \leqslant 4\sqrt{x-4}.
\end{aligned}$$

Premier cas : $x = 4$. Alors, on a $x-4 = 0 \leqslant 4 \times 0 = 4\sqrt{x-4}$ et donc (I) est vraie.
Second cas : supposons désormais que $x > 4$. On a alors

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \Leftrightarrow \quad x-4 \leqslant 4\sqrt{x-4} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{\sqrt{x-4}} \leqslant 4 \qquad \textit{car } \sqrt{x-4} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4} \leqslant 4 \\
& \Leftrightarrow \quad x-4 \leqslant 16 \qquad \textit{car } x-4 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant 20.
\end{aligned}$$

Dans ce cas l'ensemble solution est $]4;20]$.
Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = [4;20]\,.}$$