Correction de l'exercice Noël 07
DL / Equations différentielles d'ordre 2

Solution de l'exercice 1 La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ et ch sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de Taylor-Young, f admet un développement à l'ordre 4 en 0.
On a

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

Posons $u(x) = x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -x^3 \quad +o\left(x^3\right) \\ &\qquad\quad\ -x^3 \quad +o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad\ +o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Poursuivons,

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $\operatorname{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \operatorname{ch}\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Posons (E_0) l'équation homogène associée à (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \tag{E_0}$$

et (E_c) l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + r + 1 = 0. \tag{E_c}$$

Les racines de (E_c) sont les racines troisièmes de l'unité i.e. $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Cherchons une solution de (E). On note que 3 n'étant pas une solution de (E_c), nous cherchons une solution du type $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x}$. Posons donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_p : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x}$. La fonction y_p est deux fois dérivable et

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & y_p'(x) = 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_p''(x) = 9\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x}\,. \end{array}$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcll} y_p \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 9\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} + 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} + \lambda\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 13\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} & \\ & \Leftrightarrow & 13\,\lambda = 1 & \text{car } \mathrm{e}^{3x} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{1}{13}. & \end{array}$$

On obtient alors que $y_p : x \mapsto \frac{1}{13}\,\mathrm{e}^{3x}$ est UNE solution de (E).
Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \dfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$