Correction de l'exercice Noël 08
DL / Matrices

Solution de l'exercice 1 *La fonction n'est pas définie en* 0 *a priori donc rien ne nous garantit en amont l'existence d'un développement limité.*
On a d'une part,

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Et d'autre part,

$$x^2 - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc,

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}{x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-1 + x + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}$$

Posons $u(x) = \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par suite,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)$.
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- Nécessairement, $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Notez qu'il est nécessaire d'aller à l'ordre 2 *en* $u(x)$ *car si l'on s'était arrêté à l'ordre* $u(x)$: $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ *et non* $o\left(x^3\right)$ *comme souhaité.*
Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$. Ainsi

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{-1+x+\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-1 + x + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llllll} -1 & & +\frac{x^2}{6} & & +o\left(x^3\right) \\ & +x & & -\frac{x^3}{6} & +o\left(x^3\right) \\ & & +\frac{x^2}{6} & & +o\left(x^3\right) \\ & & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} -1 + x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a les calculs matriciels suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{N^0 = I_3, \quad N^1 = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_3.}$$

2. Calculons les puissances de A. On observe que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + N.$$

Puisque $2I_3$ et N commutent : $2I_3N = N2I_3 = 2N$, par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k 2^{n-k} I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k 2^{n-k}. \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} 2^n I_3 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + 0_3 \\ &= 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai si $n = 0$ ou 1. Donc

$$\boxed{A^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12n & 8 & 0 \\ n(n-1) & 4n & 8 \end{pmatrix}.}$$