Correction de l'exercice Noël 09
DL / Système linéaire

Solution de l'exercice 1 On sait que

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}u^3+o\left(u^3\right) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o\left(u^3\right).$$

Posons $u(x)=x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+o\left(x^6\right).$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{0}$. Donc

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} \frac{x^2}{4} & -\frac{x^4}{16} & +o\left(x^5\right) \\ & -\frac{x^4}{16} & +o\left(x^5\right) \\ & & +o\left(x^5\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} \frac{x^3}{8} & -\frac{x^5}{32} & +o\left(x^5\right) \\ & -\frac{x^5}{16} & +o\left(x^5\right) \\ & & +o\left(x^5\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^3}{8}-\tfrac{3x^5}{32}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Mais aussi,

$$\begin{aligned} u(x)^5=u(x)^3u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x^3}{8}-\tfrac{3x^5}{32}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^5}{32}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{32}$ i.e. $u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{32}+o\left(x^5\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^5}{32}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Notez au passage que le calcul de u^4 n'a pas été nécessaire mais celui de u^2 si pour obtenir u^3 notamment.
Or $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan(u(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{16} + o(x^5) \\ &\qquad - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{32} + o(x^5) \\ &\qquad + \frac{x^5}{160} + o(x^5) \\ &\qquad + o(x^5) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o\left(x^5\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} (S_m) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y - (m+1)z = 1 - m \\ -(m+1)z = 1 - m \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}\,. \end{aligned}$$

Premier cas, $m = -1$. Dès lors,

$$S_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -2y = 2 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

Donc l'ensemble des solutions de (S_{-1}) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{-1} = \emptyset.}$$

Supposons maintenant $m \neq -1$. On a donc $m + 1 \neq 0$. Donc

$$(S_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y - (m+1)z = 1 - m \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow -\frac{1}{m+1} L_3\,.$$

Deuxième cas, $m = 1$. On a alors,

$$(S_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{(1-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}\,.}$$

C'est une droite affine passant par $(1,0,0)$ *et de vecteur directeur* $(-1,1,0)$.

Supposons maintenant que $m \in \{-1, 1\}$. Dans ce cas,

$$
\begin{aligned}
(S_m) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ y - \frac{m+1}{m-1} z = -1 \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ y = -1 + \frac{m+1}{m-1} z = -1 + \frac{m+1}{m-1} \frac{m-1}{m+1} = 0 \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = m - mz = m - m\frac{m-1}{m+1} = m\frac{m+1-m+1}{m+1} = \frac{2m}{m+1} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{m+1}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Conclusion, pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$
\boxed{\mathscr{S}_m = \left\{ \left(\frac{2m}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1} \right) \right\}.}
$$