

Exercice Noël 10

Analyse asymptotique

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$. On admet que

- f est bien définie sur \mathbb{R} ,
- f est impaire,
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que le graphe de $h : x \mapsto \exp^{f(x)}$ admet une asymptote en $+\infty$, préciser l'équation de cette asymptote et préciser la position du graphe de h par rapport à cette asymptote.
2. Montrer que f définit une bijection de \mathbb{R} dans un ensemble que l'on précisera. On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque. On admet que g possède un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4).$$

3. A l'aide du développement limité de f en 0 et la relation $\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = x$, déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de g .