Exercice 1)

1) On a : $h : x \longmapsto e^{f(x)}$

avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

Donc par composée, h est définie sur $\mathbb{R}$.

On a par composée, ~~$\ln(\sqrt{1+x^2}+x) + \infty$~~

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2}+x) = +\infty$$

Donc par composée, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}}{x}$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1$$

Donc on a : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \cancel{+\infty}$.

Donc le graphe de h admet une ~~asymptote~~ branche ~~oblique~~ parabolique de direction asymptotique (O_y) en $+\infty$.

~~Donc d'après le théorème de la bijection, h admet une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.~~

2)

<u>On a</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

~~On~~ On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

direct

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; (\leq 1)$

Donc on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) > 0$. ✓

~~Donc~~ De plus, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} + x = +\infty$ ✓

Par composée, on a : $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. ✓

Donc on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ✓

De plus f est impaire, Donc on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. ✓

Donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc par le théorème de la bijection, f admet une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Bien.

On note g sa fonction réciproque.

<u>3)</u> On a :

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(f(x)) = x$

OK cf corrigé.