

Exercice 1)

1) On a: $h: x \mapsto e^{f(x)}$

avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

Donc par composée, h est définie sur \mathbb{R} . ✓

On a par composée, ~~$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = +\infty$~~

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = +\infty$$

Donc par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. ✓

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{h(x)}{x} &= \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{x} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \end{aligned}$$

Donc on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$$

Donc le graphe de h admet une ~~asymptote~~ branche oblique parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

~~Donc d'après le théorème de la bijection,
il admet une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ .~~

2)

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

~~On a:~~ $\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \right)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$

car $x + \sqrt{x^2}$
est strictement
croissante sur \mathbb{R}^+

$\Rightarrow 0 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ *direct*

Donc on a: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. ✓

De plus, on a:

~~Donc~~ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} + x = +\infty$ ✓

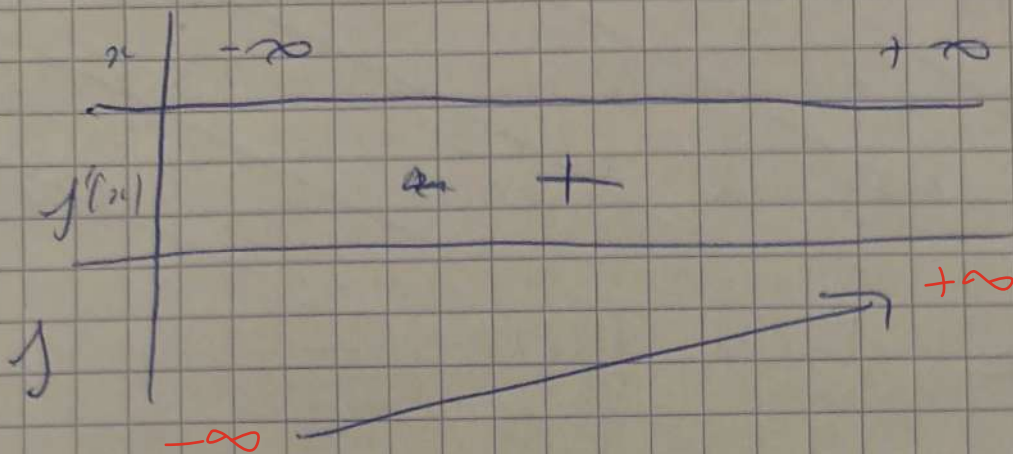
Par composée, on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. ✓

Donc on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. ✓

De plus f est impaire, donc on a:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. ✓

Donc on a :



On a : f est continue sur \mathbb{R} ✓
car f est dérivable sur \mathbb{R} .
 f est strictement croissante sur \mathbb{R} . ✓

Ainsi par le théorème de la bijection,
 f admet une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note g sa fonction réciproque. Bien.

3) On a :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(f(x)) = x$

OK et corrigé.